1. Derivace elementárních funkcí

$y = 5 \qquad y' = 0$

$y = -2x \qquad y' = -2$

$y = x^n \qquad y' = n x^{n-1}$

$y = x^2 \qquad y' = 2x$

$y = x^7 \qquad y' = 7 \cdot x^6$

$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad y' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \qquad y' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt[3]{x^5} = x^{\frac{5}{3}} \qquad y' = \frac{5}{3} x^{\frac{2}{3}} = \frac{5}{3} \sqrt[3]{x^2}$

$y = \sin x \qquad y' = \cos x$

$y = \cos x \qquad y' = -\sin x$

$y = a^x \qquad y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x \qquad y' = e^x \cdot \ln e = e^x$

$y = \log_a x \qquad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

$y = \ln x \qquad y' = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x}$

2. Derivace lineárních kombinací elementárních funkcí

PET. 19/19

$y = 3x^5 + 2x - 5\sin x \qquad y' = 15x^4 + 2 - 5\cos x$

$y = 2x^{-1} + 7 + 3\ln x \qquad y' = -2x^{-2} + 0 + \frac{3}{x}$

$y = 4\sqrt{x} - 2^x \qquad y' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2^x \cdot \ln 2 = \frac{2}{\sqrt{x}} - 2^x \cdot \ln 2$

$y = 5\ln x - 3\cos x \qquad y' = \frac{5}{x} + 3\sin x$

3. Derivace složené funkce PET 19/22

$y = \sin x \qquad y' = \cos x$

$y = \sin(5x+2) \qquad y' = \cos(5x+2)\cdot 5$

$y = \sin(x+7) \qquad y' = \cos(x+7)\cdot 1 = \cos(x+7)$

$y = \sin(x^3-x) \qquad y' = \cos(x^3-x)\cdot(3x^2-1)$

$y = e^x \qquad y' = e^x$

$y = e^{-\frac{x}{2}+5} \qquad y' = e^{-\frac{x}{2}+5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$y = e^{\frac{x^2}{5}} \qquad y' = e^{\frac{x^2}{5}}\cdot\left(\frac{2x}{5}\right)$

$y = \sqrt{x} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$y = \sqrt{\sin x + 3} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{\sin x+3}}\cdot\cos x$

$y = \sin^3 x + 4 \qquad y' = 3\sin^2 x\cdot\cos x$

$y = \sqrt{(\sin x)^2+5} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{(\sin x)^2+5}}\cdot 2\sin x\cdot\cos x$

4. Derivace součinu funkcí PET 19/21

$y = x^5\cdot\sin x \qquad y' = 5x^4\sin x + x^5\cos x$

$y = e^{2x}\cdot\sin(3x) \qquad y' = e^{2x}\cdot 2\cdot\sin(3x) + e^{2x}\cdot\cos(3x)\cdot 3$

$y = \ln(x^2+1)\cdot x^3 \qquad y' = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x\cdot x^3 + \ln(x^2+1)\cdot 3x^2$

$= \frac{2x^4}{x^2+1} + 3x^2\cdot\ln(x^2+1)$

$y = 2\cdot\sin x\cdot\cos x \qquad y' = 2\cos x\cdot\cos x + 2\sin x\cdot(-\sin x)$

$= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x$

5. Derivace podílu funkcí PET 19/21

$$y = \frac{x^3 - 1}{2x+1} \qquad y' = \frac{3x^2 \cdot (2x+1) - (x^3 - 1) \cdot 2}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 + 3x^2 - 2x^3 + 2}{(2x+1)^2} = \frac{4x^3 + 3x^2 + 2}{(2x+1)^2}$$

$$y = tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad y' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \frac{\ln x}{x} \qquad y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

6. Určete, pro jaká x má funkce $y = x^2 - 4x - 7$ nulovou derivaci, kdy je rostoucí a kdy je klesající. PET 19/38

$$y' = 2x - 4 = 0$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$

Derivace je 0 právě tehdy, když $x = 2$.

Zvolíme libovolné číslo z intervalu $(-\infty; 2)$, např. $x = 0$.

$y'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow$ funkce je klesající.

Zvolíme libovolné číslo z intervalu $(2; +\infty)$, např. $x = 10$.

$y'(10) = 2 \cdot 10 - 4 = 16 > 0 \Rightarrow$ funkce je rostoucí.

7. Určete, pro jaká x má funkce $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 10$ nulovou derivaci, kdy je rostoucí a kdy je klesající.

$$y' = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$$
$$5x^2 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$$
$$5x^2 \cdot (x-1)(x-3) = 0$$

$y' = 0$ pro $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ a $x_3 = 3$.

Zvolím si číslo z intervalu a určím znaménko derivace

$y'(-1) = 5 \cdot 1 - 20 \cdot (-1) + 15 \cdot 1 = 40 > 0$ fce rostoucí

$y'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \frac{1}{16} - 20 \cdot \frac{1}{8} + 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{25}{16} > 0$ fce rostoucí

$y'(2) = 5 \cdot 16 - 20 \cdot 8 + 15 \cdot 4 = -20 < 0$ fce klesající

$y'(5) = 5 \cdot 625 - 20 \cdot 125 + 15 \cdot 25 = 1000$ fce rostoucí

8. Určete, pro jaká x má funkce $y = x^3 \cdot e^{-x}$ nulovou derivaci, kdy je rostoucí a kdy je klesající.

$$y' = 3x^2 e^{-x} + x^3 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 0$$
$$= x^2 \cdot e^{-x} \cdot (3 - x) = 0$$

$y' = 0$ pro $x_1 = 0$ a $x_2 = 3$

$y'(-1) = (-1)^2 \cdot e^{-(-1)} \cdot (3-(-1)) = e \cdot 4 > 0$ fce R

$y(1) = 1^2 \cdot e^{-1} \cdot (3-1) = \frac{2}{e} > 0$ fce R

$y(4) = 4^2 \cdot e^{-4} \cdot (3-4) = \frac{-16}{e^4} < 0$ fce K

9. Určete rovnici tečny ke grafu funkce y = $\sqrt{x}$ v dotykovém bodě T = [9; 3]. *Poznámka: Dotykový bod, zde T = [9; 3], musí ležet na grafu zadané funkce, jinak by zadání nemělo smysl.*

PET 19/26

a) Vypočteme derivaci funkce: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

b) Vypočteme hodnotu derivace v bodě x = 9: $y'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$

c) Tečna je přímka, přímka má rovnici t: $y = ax + b$. Hodnota derivace v bodě určuje směrnici tečny.
Proto bude mít tečna rovnici t: $y = \frac{1}{6}x + b$.

d) Vypočteme hodnotu koeficientu b tak, aby tečna procházela bodem T = [9; 3]. Tedy když x = 9, tak y = 3.

$$3 = \frac{1}{6} \cdot 9 + b$$

$$\frac{6}{2} = \frac{3}{2} + b$$

$$\frac{3}{2} = b$$

e) Tečna má tedy rovnici t: $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$

f) Místo výpočtu podle d), e) je možné dosadit do vzorce: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$, ve kterém jsou x_0 a y_0 souřadnice dotykového bodu, tedy:

$$y - 3 = y'(9) \cdot (x - 9)$$

$$y - 3 = \frac{1}{6} \cdot (x - 9)$$

$$y = \frac{1}{6}x - \frac{9}{6} + 3 = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$$

10. Určete rovnici tečny ke grafu funkce y = x^2 – 1 v dotykovém bodě T = [2; 3].

$y' = 2x$ $\quad$ $y'(2) = 4$ $\quad$ $t: y = 4x + b$

$3 = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -5$

$t: y = 4x - 5$

Nebo podle vzorce:

$$y - 3 = 4 \cdot (x - 2)$$

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$y = 4x - 5$$