Relativní pohyb; setrvačné síly

`fikt4.TEX`

1 Jak se správně chovat v nesprávných situacích

1.1 Slušné chování dítěte

Výchova dítěte začíná v útlém dětství v rodině. Dítko ze dozví, jak se „standardně" správně chovat: nemá moc křičet, má slušně odpovídat na otázky, nemá lhát apod. Tato pravidla jsou celkem jednoduchá a srozumitelná, a proto i celkem snadno zapamatovatelná.

Problém je ale v tom, že ne každá situace je „standardní". Na dědečka se musí křičet, protože nedoslýchá. Tetičce se neříká (podle pravdy), že je protivná. Než se řekne cizímu člověku pravda, musí se uvážit, zda má vůbec *on* právo pravdu znát a *já* právo ji sdělit. Někdy je správné docela i zalhat. Dítko záhy zjišťuje, že nestandardních situací je hodně.

Naštěstí ani v nestandardních situacích není dítě ztraceno a bezradné. V podstatě stačí uvážit, co v takové situaci přebývá nebo čeho se nedostává a podle toho pak něco ubrat nebo přidat ke standardnímu chování.

$\hookleftarrow$ Dítě nakonec zjistí, že i ono samo je stejně „nestandardní", nesprávné a obyčejné jako všichni ostatní lidé kolem. Pak si poradí i s tím, že opravdu „standardní" situace vlastně nenastává nikdy. To už pak ovšem nebude dítě, ale dospělý člověk.

1.2 Slušné chování klasické částice

Při výuce klasické mechaniky je to jako při výchově dítěte. Napřed jsme se z prvního Newtonova zákona dozvěděli, co dělá volná částice[1] za „standardních" okolností:

$$\boxed{\textit{Volná částice se pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo stojí).}}$$

Když měříme její polohu v newtonovském absolutním prostoru a čase (což je „ta nejsprávnější" vztažná soustava $\mathcal{S}_0$), zjistíme, že souřadnice částice závisejí na čase lineárně[2]. Částice má tedy rychlost neproměnnou a zrychlení nulové. Pokud stojí, je dobře; pokud se pohybuje, říkáme, že se pohybuje setrvačností[3]. Setrvačnost je vlastností každé částice s hmotností $M > 0$, a protože setrvačnost je latinsky inertia, nazýváme soustavu $\mathcal{S}_0$ *inerciální.*

Proč označujeme přívlastkem „inerciální" vztažnou *soustavu*, a nikoli *částici*? Setrvačnost je sice vlastností částice, ale její polohu, a tedy ověření toho, jak se pohybuje, zjišťujeme vůči konkrétní vztažné soustavě. Kdyby se nám tato soustava pohybovala pod rukama, naměřili bychom v ní jiné hodnoty polohy a jejich závislost na čase by nemusela být lineární. Takovou soustavu bychom nazvali *neinerciální.*

Dále víme již od Galilea, že nejenom $\mathcal{S}_0$, ale i každá vztažná soustava $\mathcal{S}$, která se vůči $\mathcal{S}_0$ pohybuje rovnoměrně přímočaře (anebo stojí), je taky „správná", tedy inerciální: souřadnice volné částice měřené v kterékoli inerciální soustavě také závisejí na čase lineárně.

Když není částice volná proto, že na ni působí síly, tak jí úhrnná síla $\sum \boldsymbol{F}$ udělí zrychlení $\boldsymbol{A}$ takové, že

$$M\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{F}. \tag{1}$$

Když částice není volná proto, že je podrobena vazbám (tedy omezením v pohybu, např. klouže uvnitř různě zohýbané trubičky), tak můžeme vazby nahradit *vazbovými silami* $\boldsymbol{F}_\mathrm{v}$:

$$M\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{F} + \sum \boldsymbol{F}_\mathrm{v}. \tag{2}$$

Zřejmě se nic podstatného nezmění, když vazbové síly přidáme k silám „obyčejným"[4] a pravou stranu budeme nadále psát prostě $\sum \boldsymbol{F}$ tak, jak to bylo v rov. 1. Ta nám tedy zůstává základní pohybovou rovnicí.

[1] Částicí nazýváme těleso o vlastních rozměrech v konkrétní úloze nepodstatných.
[2] Do lineární závislosti se samozřejmě vejde i speciální případ, že se její souřadnice s časem nemění vůbec – částice stojí.
[3] Pozor: *setrvačností* ano, ale nikoli setrvačnou *silou*! Na rovnoměrný přímočarý pohyb částice žádnou sílu nepotřebuje.
[4] Vazba se ostatně prakticky vždy realizuje silami (pevností materiálu apod.).

Ale co když soustava, ve které chceme částici popisovat, není inerciální? (Značíme ji za trest malým písmenem $\mathscr{s}$.) Zajímá-li nás Foucaltovo kyvadlo nebo pohyb pasátů na Zemi, musíme uvážit, že Země, na níž a vůči níž provádíme měření, se otáčí kolem své osy. Soustava $\mathscr{s}$ s ní spjatá proto není inerciální, jenže popis „mimo Zemi“ by byl evidentně nepraktický. Uvažme nyní, co se v novém popisu mění:

- Hmotnost částice M je na vztažné soustavě nezávislá[5].
- Síly $\boldsymbol{F}$ popisují interakci mezi částicemi, a ta rovněž nezávisí na tom, kdo ji odkud popisuje. Obě dynamické[6] veličiny tedy zůstávají stejné, na volbě vztažné soustavy nezávislé.

  Pokud ovšem chceme vektory vyjádřit ve složkách, pak na volbě vztažné soustavy záleží: jednak se mění poloha působiště síly, jednak – pokud se $\mathscr{s}$ vůči $\mathcal{S}$ otáčí – se s časem mění složky v_k každého vektoru $\boldsymbol{v}$ vyjadřované v $\mathscr{s}$ (tj. jako kombinace $\boldsymbol{v} = \sum_k v_k \boldsymbol{e}^k$ otáčejících se vektorů $\boldsymbol{e}^k$ báze v $\mathscr{s}$. I kdyby se totiž vektor $\boldsymbol{v}$ sám vůči $\mathcal{S}$ neměnil, točí se báze $\boldsymbol{e}^k$ vůči $\mathcal{S}$.
- Zrychlení $\boldsymbol{A}$ je časovou změnou rychlosti $\boldsymbol{V}$ a ta je časovou změnou polohy $\boldsymbol{R}$. Počítáme ho z časového průběhu polohy částice jako
  $$\boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\, t^2}.$$
  Jakmile se tedy vztažná soustava $\mathscr{s}$, v níž počítáme, pohybuje vůči $\mathcal{S}$ jinak než rovnoměrně přímočaře (a je tedy neinerciální), pak každá derivace polohového vektoru počítaná v $\mathscr{s}$ vnese dodatečný příspěvek do výrazu pro zrychlení. (Také se bude měnit vyjádření vektoru ve složkách u vektoru síly i u vektoru zrychlení, a to u obou stejně.)

Umíme-li ovšem popsat pohyb $\mathscr{s}$ vůči $\mathcal{S}$, dovedeme také spočítat, jak se v rov. 1 „nestandardnost“ (=neinerciálnost) vztažné soustavy $\mathscr{s}$ při výpočtu projeví. Pak můžeme dodatečný příspěvek vhodným způsobem zase odečíst. Tím dostaneme pohybové rovnice v takovém tvaru, že budou platné i v neinerciální soustavě.

$\longleftrightarrow$ A je to podobné jako s přerodem dítěte v dospělého. Můžeme totiž nejprve odvodit pohybové rovnice v nejobecnějších křivočarých souřadnicích. Pak do nich můžeme zahrnout, že prostor a čas spolu úzce souvisejí (přes konstantní rychlost světla). Nakonec si uvědomíme, že kvůli existenci gravitace[7] *neexistuje* žádná inerciální soustava ($\mathcal{S}_0$, tedy ani $\mathcal{S}$). Ale naše nejobecnější pohybové rovnice pro svou platnost již žádnou inerciální soustavu nepotřebují, a proto platí i tehdy. Tím už pak ovšem nejsme v klasické mechanice, ale zvládli jsme obecnou teorii relativity.

1.3 Jak to popsat co nejvýhodněji

1.3.1 Čeho v popisu používat

Pro popis dějů v neinerciální soustavě $\mathscr{s}$ jsou vhodné takové pohybové rovnice, v nichž se budou vyskytovat

- souřadnice zkoumaných objektů vyjádřené v neinerciální soustavě $\mathscr{s}$ (např. že na Zemi se na severní polokouli stáčejí pasáty doprava – vůči Zemi),
- popis neinerciální soustavy $\mathscr{s}$ samotné vyjádřený v soustavě inerciální $\mathcal{S}$ (např. že Země se točí od západu k východu – vůči sluneční soustavě).

1.3.2 Jak toho používat

Víme, že neinerciálnost $\mathscr{s}$ nám změnila hodnoty *kinematické* veličiny – zrychlení. Stačilo by tedy přepočíst hodnoty zrychlení ze soustavy neinerciální do inerciální. My ale učiníme něco rafinovanějšího: nebudeme vůbec hovořit o přepočtu zrychlení do „správných“ souřadnic. Místo toho *důsledně zachováme tvar rov. 1.* Na levé straně zapíšeme zrychlení $\boldsymbol{a}$ měřené v $\mathscr{s}$ (formálně stejně, jako tomu bylo v inerciální soustavě) a vše ostatní, tedy rozdílové zrychlení $\boldsymbol{a}_\Delta = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{a}$ vynásobené hmotností M, převedeme s opačným znaménkem na pravou stranu a tam ho budeme interpretovat jako novou *dynamickou* veličinu – *setrvačnou sílu.* Tu tedy zavádíme navíc, popisujeme-li (jakýkoliv) pohyb v neinerciální soustavě. Shrňme znovu:

[5] To je pravda v rámci nerelativistické fyziky. V relativitě bychom si uměli také poradit, ale tím se teď nezdržujme.

[6] Připomeňme, že kinematické veličiny (poloha $\boldsymbol{R}$, čas T, rychlost $\boldsymbol{V}$, zrychlení $\boldsymbol{A}$) popisují, *jak* pohyb probíhá. Dynamické veličiny (hmotnost M, síla $\boldsymbol{F}$) popisují, *proč* tak probíhá.

[7] Žádná volná částice totiž neexistuje: není čím odstínit gravitaci, když působí na všechny hmoty úplně stejně!

- spočítáme rozdíl $\boldsymbol{a}_\Delta = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{a}$ mezi vyjádřením zrychlení v $\mathcal{S}$ a $\mathcal{s}$. Rov. 1 (tj. $M\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{F}$) má tedy zatím tvar

$$M(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}_\Delta) = \sum \boldsymbol{F}$$

- výraz $M\boldsymbol{a}_\Delta$ převedeme (s opačným znaménkem) na pravou stranu; tím na levé straně zbyde jen zrychlení změřené v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$:

$$M\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} + (-M\boldsymbol{a}_\Delta)$$

- výraz $(-M\boldsymbol{a}_\Delta)$, který přibyl na pravé straně u sil, označíme $\boldsymbol{j}$ a nazveme ho *setrvačnou silou*
- takto vzniklá rovnice

$$M\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} + \boldsymbol{j} \tag{3}$$

bude v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ správnou pohybovou rovnicí; součin hmotnosti M a zrychlení $\boldsymbol{a}$ částice (tentokrát změřeného v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$) je roven součtu $\sum$ všech sil (tentokrát včetně nové síly – setrvačné).

2 Jak se může pohybovat neinerciální soustava $\mathcal{s}$

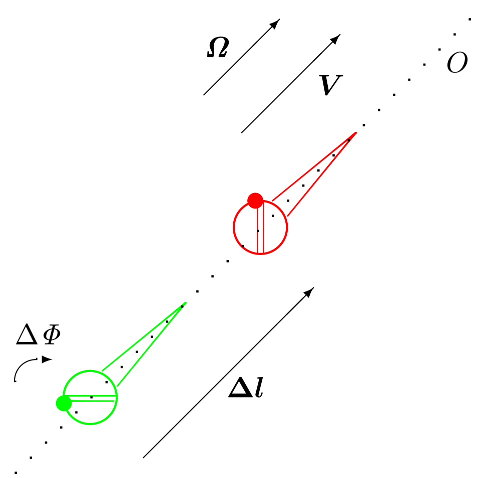
2.1 Značení

V celém výkladu budeme pečlivě rozlišovat popis v inerciální a v neinerciální soustavě. Pro veličiny užíváme

- v inerciální soustavě $\mathcal{S}$ velká písmena, pro složky vektorů indexované závorky $[\ ]_\mathsf{i}$,
- v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ malá písmena, pro složky vektorů závorky $[\ ]_\mathsf{n}$.

2.2 Nejobecnější pohyb soustavy $\mathcal{s}$

Připomeňme, že pojem vztažné soustavy vznikl zobecněním pojmu tuhého tělesa. Nejobecnější *přemístění*[8] vztažné soustavy z $\mathcal{s}$ (v čase t) na $\mathcal{s}'$ (v čase $t + \Delta t$) bude tedy vůči $\mathcal{S}$ popsáno stejně jako nejobecnější[9] přemístění tuhého tělesa v $\mathcal{S}$, totiž *kinematickým šroubem*: během doby Δt dojde k posunutí $\Delta\boldsymbol{l}$ a k současnému otočení o úhel $\Delta\varPhi$ podél osy O rovnoběžné se směrem posunutí $\Delta\boldsymbol{l}$.



Obrázek 1: Kinematický šroub; $\boldsymbol{V} = \mathrm{d}\,\boldsymbol{l}/\,\mathrm{d}\,T$, $\varOmega = \mathrm{d}\,\varPhi/\,\mathrm{d}\,T$.

Jde-li o přemístění infinitezimální, lze infinitezimální úhel popsat vektorem a celé přemístění za dobu Δt lze popsat osou O a dvěma vektory, které jsou s ní rovnoběžné (ať už souhlasně či nesouhlasně):

[8] Jde zatím o přemístění (poloha počáteční a koncová), nikoli přemisťování (pohyb – děj probíhající mezi krajními polohami).
[9] Důkaz je v Dodatku 1.

- volný vektor posuvné rychlosti $\boldsymbol{V} = \Delta \boldsymbol{l}/\Delta t$
- klouzavý vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Delta \Phi}/\Delta t$; klouže po ose O.

Nejobecnější *pohyb* vytvoříme posloupností takových přemístění postupně po sobě probíhajících v čase – asi jako kinofilm z jednotlivých snímků. S časem t se pak mohou obecně měnit[10] obě rychlosti $\boldsymbol{V}(t)$, $\boldsymbol{\Omega}(t)$ co do velikosti i co do směru (osa $O(t)$).

V duchu naší úmluvy značíme okamžitou osu kinematického šroubu písmenem O v soustavě $\mathcal{S}$, ale o v soustavě $\mathcal{s}$. Z hlediska $\mathcal{S}$ se soustava $\mathcal{s}$ otáčí kolem osy O úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\Omega}(t)$.

Z hlediska $\mathcal{s}$ se naopak otáčí $\mathcal{S}$, a to úhlovou rychlostí $\boldsymbol{\omega}(t) = -\boldsymbol{\Omega}(t)$. Toho však nebudeme používat – v duchu kap. 1.3.1.

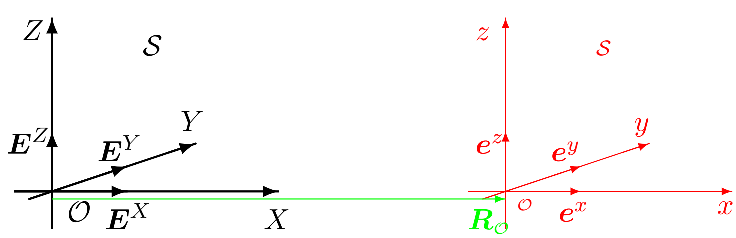
2.3 Rozděl a panuj

Partie setrvačných sil je pojmově a představově obtížná; vždyť jsme „vytvořili“ dynamickou veličinu – setrvačnou sílu – zcela formálně, z kinematického popisu neinerciální vztažné soustavy! Sám výpočet je triviální při posuvném pohybu, ale při otáčivém pohybu je již složitější. Použijeme tedy staré latinské taktiky a budeme vyšetřovat oba pohyby samostatně, a to vždy nejprve v jejich nejjednodušší verzi.

3 Posuvný pohyb

3.1 Vztažné soustavy

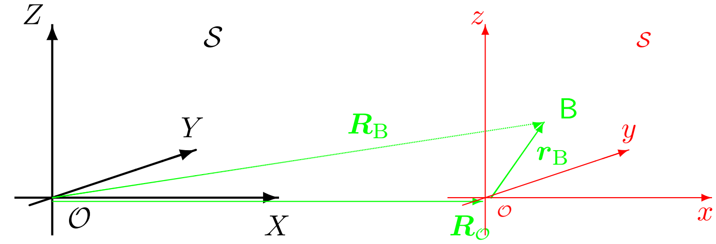
Podstatu problému popíšeme nejjednodušeji, když orientujeme v obou soustavách $\mathcal{S}$ a $\mathcal{s}$ osy stejně, a to tak, aby se $\mathcal{s}$ pohyboval vůči $\mathcal{S}$ podél osy x. Jednotkové vektory báze $\boldsymbol{e^x}$, $\boldsymbol{e^y}$, $\boldsymbol{e^z}$ soustavy $\mathcal{s}$ jsou zřejmě tytéž jako odpovídající jednotkové vektory báze $\boldsymbol{E^X}$, $\boldsymbol{E^Y}$, $\boldsymbol{E^Z}$ soustavy $\mathcal{S}$ a nemění se v průběhu času. Pohyb počátku $\mathcal{O}$ soustavy $\mathcal{s}$ bude v $\mathcal{S}$ popsán časovou závislostí jeho polohového vektoru $\boldsymbol{R}_{\mathcal{O}}(t)$.



Obrázek 2: Báze vztažných soustav při posuvu

Při posuvném pohybu se nemění s časem vektory báze $\boldsymbol{e}^x$, $\boldsymbol{e}^y$, $\boldsymbol{e}^z$. Má-li bod B svůj polohový vektor $\boldsymbol{R}_\mathrm{B}$ v $\mathcal{S}$ a $\boldsymbol{r}_\mathrm{B}$ v $\mathcal{s}$, platí zřejmě

$$\boldsymbol{R}_\mathrm{B}(t) = \boldsymbol{R}_{\mathcal{O}}(t) + \boldsymbol{r}_\mathrm{B}(t). \tag{4}$$



Obrázek 3: Polohové vektory

[10] Mohou se měnit nespojitě i při spojitém pohybu; polohu totiž získáváme integrací rychlostí.

Opakovanou derivací podle času dostaneme vztahy mezi rychlostmi $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{v}$ i zrychleními $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_{\mathrm{B}}(t) &= \boldsymbol{V}_{\mathcal{O}}(t) + \boldsymbol{v}_{\mathrm{B}}(t) && (5) \\ \boldsymbol{A}_{\mathrm{B}}(t) &= \boldsymbol{A}_{\mathcal{O}}(t) + \boldsymbol{a}_{\mathrm{B}}(t). && (6) \end{aligned}$$

$\hookleftarrow$ Rovnice 4 až 6 *vůbec* nejsou jednoduché; sčítance na pravé straně jsou vyjádřeny v různých vztažných soustavách!

Z hlediska soustavy $\mathcal{s}$ se ovšem pohybuje $\mathcal{S}$ (opačným směrem); je-li tedy $\boldsymbol{r}_{\mathcal{O}}$ polohový vektor počátku $\mathcal{O}$ soustavy $\mathcal{S}$ vyjádřený v $\mathcal{s}$, pak

$$\boldsymbol{r}_{\mathcal{O}} = -\boldsymbol{R}_{\mathcal{O}}, \qquad \boldsymbol{v}_{\mathcal{O}} = -\boldsymbol{V}_{\mathcal{O}}, \qquad \boldsymbol{a}_{\mathcal{O}} = -\boldsymbol{A}_{\mathcal{O}}. \tag{7}$$

3.2 Popis vůči neinerciální soustavě $\mathcal{s}$

V duchu odst.1.3.1 můžeme psát pohybovou rovnici v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$ ve tvaru

$$M\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{f} + \boldsymbol{j}, \tag{8}$$

kde $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{F}$ jsou skutečné síly působící na částici[11]) a kde jsme navíc zavedli setrvačnou sílu $\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{j} = -M\boldsymbol{A}_{\mathcal{O}} = M\boldsymbol{a}_{\mathcal{O}} \tag{9}$$

„působící“ na sledovaný bod B v soustavě $\mathcal{s}$.

3.3 Velmi důležitá ideologie

Proč jsme dali v poslední větě předchozího odstavce ono „působení“ do uvozovek? Pročpak znevažujeme setrvačnou sílu?

Skutečné síly popisují opravdu *působení*, a to vždy mezi dvěma částicemi[12], tedy na zkoumanou částici od nějaké částice jiné. Ale setrvačná síla *nepopisuje* působení mezi dvěma částicemi; ona „působí“ na zkoumanou částici jaksi „odnikud“. Fakticky totiž na částici nepůsobí vůbec nic – to jenom my jsme si zavedli novou „sílu“ pro napravení toho, že pohyb částice popisujeme v neinerciální soustavě $\mathcal{s}$. Proto se těmto dodatečně zavedeným silám říká také *zdánlivé*, *fiktivní*, *kinematické* apod. a jejich použití proto vždy doplňujeme upřesněním „… v soustavě $\mathcal{s}$ “, nerozumí-li se to z kontextu samo sebou.

Dále, částice je částice a „nenáleží“ žádné vztažné soustavě. Konstatujeme-li tedy v rozjíždějící se tramvaji, že na nás působí setrvačná síla a tlačí nás do sedadla, pak stejně oprávněně musíme konstatovat, že na domy, koleje, stromy atd. působí tatáž setrvačná síla. Protože však tyto objekty nemají za sebou tramvajové sedadlo, které by bylo v klidu (vůči tramvaji) a o které by se opřely, pohybují se všechny tyto objekty se zrychlením daným touto setrvačnou sílou, tj. dozadu (opět vůči tramvaji).

Toto vše si důkladně rozmyslete. Začátečník mívá totiž často zábrany: je ochoten počítat s odstředivou silou působící na broučka sedícího na podlaze kolotoče, ale váhá o působení setrvačných sil při popisu pohybu dravé mouchy sledující tohoto broučka a letící stále těsně nad ním, a vůbec si nepřipouští (byť stále při popisu vůči kolotoči) potřebu použít odstředivé síly pro popis vysoko nad kolotočem kroužícího kosa zaujatého broučkem i mouchou, nebo dokonce pro popis stromu stojícího opodál, z něhož vše sleduje se zájmem kosice. Chceme-li ale zkoumat fyziku na kolotoči (rozumí se: popisovat fyzikální děje z neinerciální vztažné soustavy spojené s otáčejícím se kolotočem), pak nutně zjistíme, že se např. domy na náměstí točí dokola kolem osy kolotoče. Zdůvodníme to tím, že na ně (v soustavě kolotoče) působí setrvačná síla odstředivá a Coriolisova, a to stejným právem jako na broučka, mouchu, kosa, kosici, strom, domy kolem i Slunce nad nimi všemi. Setrvačné síly jsou prostě univerzální daní odvedenou pohybovým rovnicím za to, aby byly platné i při popisu polohy (rychlosti a zrychlení) vůči neinerciálnímu systému, jakým je v tomto případě kolotoč.

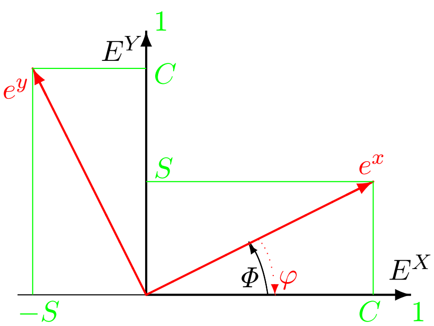
[11] Zápis $\boldsymbol{f}$ v $\mathcal{s}$ je opravdu v případě posuvného pohybu stejný jako $\boldsymbol{F}$ v $\mathcal{S}$, protože také vektory $\boldsymbol{e}$ báze $\mathcal{s}$ jsou stejné jako jim odpovídající vektory $\boldsymbol{E}$ báze $\mathcal{S}$.

[12] Těleso si prostě představíme složené z mnoha maličkých částic, které drží pohromadě silami (z hlediska tělesa vnitřními).

4 Otáčení

4.1 Báze, souřadnice bodu

Pro jednoduchost zvolíme soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ se společným počátkem a společnou osou $Z = z$. Osa z bude tedy „nezajímavá“ a budeme sledovat jen rovinu xy. Soustava $\mathscr{s}$ nechť je v ní pootočena vůči $\mathcal{S}$ o úhel $\Phi = \Phi(T)$, soustava $\mathcal{S}$ vůči $\mathscr{s}$ o úhel $\varphi = -\Phi$. Pro zkrácení pišme $\cos\Phi = C$, $\sin\Phi = S$, $\cos\varphi = c = C$, $\sin\varphi = s = -S$.



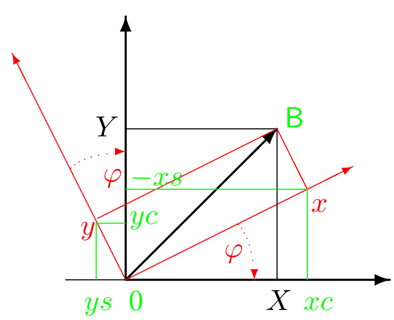
Obrázek 4: Vztažné soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ natočené vůči sobě

Pro jednotkové vektory bází obou soustav zřejmě platí (všimněte si značení složek indexy $_\mathsf{i}$ a $_\mathsf{n}$):

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\boldsymbol{E^X} & = & [1,0]_\mathsf{i} & = & c\boldsymbol{e^x} + s\boldsymbol{e^y} & = & [c,s]_\mathsf{n} \\
\boldsymbol{E^Y} & = & [0,1]_\mathsf{i} & = & -s\boldsymbol{e^x} + c\boldsymbol{e^y} & = & [-s,c]_\mathsf{n} \\
\boldsymbol{e^x} & = & [C,S]_\mathsf{i} & = & C\boldsymbol{E^X} + S\boldsymbol{E^Y} & = & [1,0]_\mathsf{n} \\
\boldsymbol{e^y} & = & [-S,C]_\mathsf{i} & = & -S\boldsymbol{E^X} + C\boldsymbol{E^Y} & = & [0,1]_\mathsf{n}
\end{array}
$$

Obecný zkoumaný bod B s polohovým vektorem $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}$ má souřadnice

$$\boldsymbol{R} = [X,Y]_\mathsf{i} = X\boldsymbol{E^X} + Y\boldsymbol{E^Y} = \boldsymbol{r} = [x,y]_\mathsf{n} = x\boldsymbol{e^x} + y\boldsymbol{e^x} \tag{10}$$



Obrázek 5: Rozklad polohového vektoru v soustavách $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ ($\varphi < 0$, $s < 0$)

Rozpisem a porovnáním dostáváme (nezapomínejme, že $\varphi < 0$, a tedy i $s < 0$)

$$
\begin{array}{rcl}
[x,y]_\mathsf{n} = x\boldsymbol{e^x} + y\boldsymbol{e^y} & = & xC\boldsymbol{E^X} + xS\boldsymbol{E^Y} - yS\boldsymbol{E^X} + yC\boldsymbol{E^Y} = X\boldsymbol{E^X} + Y\boldsymbol{E^Y}, \\
\text{odkud} \qquad X & = & xc + ys; \qquad (11) \\
Y & = & -xs + yc \qquad (12)
\end{array}
$$

4.2 Časové změny veličin

Při derivaci se zabýváme situacemi ve dvou různých okamžicích T, T'. V čase T jde o soustavy $\mathcal{S}$ a $\mathscr{s}$ svírající navzájem úhel $\varphi(T)$, v čase T' o soustavy $\mathcal{S}'$ a $\mathscr{s}'$ svírající úhel $\varphi' \equiv \varphi(T') \neq \varphi(T)$. Při výpočtu vůči $\mathcal{S}$ (vůči Newtonovu absolutnímu prostoru) je ovšem $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$, $\mathscr{s} \neq \mathscr{s}'$ a $T = t$; časovou derivaci $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}|_\mathsf{i}$ v této soustavě značme prostě $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$.

4.2.1 Časové změny vektorů báze

Počítejme nyní derivace veličin nejprve v soustavě $\mathcal{S}$. Zřejmě platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{X}} = [0,0]_{\mathsf{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(c\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + s\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}}) = -\omega s\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + c\dot{\boldsymbol{e}}^{x} + \omega c\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} + s\dot{\boldsymbol{e}}^{y} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Y}} = [0,0]_{\mathsf{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(-s\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + c\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}}) = -\omega c\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} - s\dot{\boldsymbol{e}}^{x} - \omega s\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} + c\dot{\boldsymbol{e}}^{y} = \mathbf{0} \quad .$$

Vynásobením první rovnice c resp. s, druhé $-s$ resp. c a jejich sečtením dostaneme ihned

$$\dot{\boldsymbol{e}}^{x} = -\omega\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} = \mathit{\Omega}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}}; \qquad \dot{\boldsymbol{e}}^{y} = \omega\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} = -\mathit{\Omega}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} \quad .$$

Užitím vektoru $\boldsymbol{\Omega} = [0,0,\mathit{\Omega}]_{\mathsf{i}} = [0,0,\mathit{\Omega}]_{\mathsf{n}}$ a vektorového součinu lze psát stručněji

$$\dot{\boldsymbol{e}}^{x} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}}; \qquad \dot{\boldsymbol{e}}^{y} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} \qquad .$$

Pochopitelně platí i $\dot{\boldsymbol{e}}^{z} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{z}} (= 0)$.

Analogicky můžeme provést výpočet z hlediska soustavy $\mathcal{s}$.

4.2.2 Časové změny polohového vektoru

Pohybuje-li se uvažovaný bod, můžeme vyjádřit v obou soustavách jeho rychlost; definujme

$$\boldsymbol{V} \equiv [\dot{X},\dot{Y}]_{\mathsf{i}} \quad , \qquad \text{resp.} \quad \boldsymbol{v} \equiv [\dot{x},\dot{y}]_{\mathsf{n}} \quad .$$

Vztah mezi nimi je složitější; nalezneme ho ovšem rovněž z uvedených definic.

Uvažujme z hlediska $\mathcal{S}$:

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(X\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{X}} + Y\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Y}}) = \dot{X}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{X}} + X\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{X}} + \dot{Y}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Y}} + Y\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{Y}} = \dot{X}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{X}} + \dot{Y}\boldsymbol{E}^{\boldsymbol{Y}} = \boldsymbol{V},$$

neboť v $\mathcal{S}$ jsou $X\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{X}}$, $Y\dot{\boldsymbol{E}}^{\boldsymbol{Y}}$ rovny nule. Dále ovšem je tento výraz roven

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(x\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + y\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}}) = \dot{x}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + x\dot{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{x}} + \dot{y}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} + y\dot{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}.$$

Absolutní rychlost $\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\,t}$ (měřená v $\mathcal{S}$) je tedy rovna součtu *relativní rychlosti* $\boldsymbol{v}$ (měřené v soustavě $\mathcal{s}$) a *unášivé rychlosti* $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}$ (která je nenulová, i když bod vůči soustavě $\mathcal{s}$ stojí).

4.2.3 Časové změny obecného vektoru

Uvažujeme libovolný vektor $\boldsymbol{B} = [B_X, B_Y, B_Z]_{\mathsf{i}} = \boldsymbol{b} = [b_x, b_y, b_z]_{\mathsf{n}}$, obecně časově proměnný. Výše byl odvozen vzorec pro transformaci rychlosti, tedy pro $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}$. Diferenciál $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}$ je však „prototypem“ vektoru vůbec (v tom smyslu, že vektorem nazýváme každou veličinu, která se transformuje jako $\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}$). Proto analogicky jako výše je časová změna každého vektoru $\boldsymbol{B}$ rovna

$$\dot{\boldsymbol{B}} \equiv [\dot{B}_X, \dot{B}_Y]_{\mathsf{i}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}(b_x\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + b_y\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}}) = \dot{b}_x\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{x}} + b_x\dot{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{x}} + \dot{b}_y\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{y}} + b_y\dot{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{y}} = \dot{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{b}. \tag{13}$$

Všimněte si dobře: časová změna vektoru v soustavě $\mathcal{S}$ je vyjádřena pomocí veličin měřených v soustavě $\mathcal{s}$, ale rychlosti $\boldsymbol{\Omega}$ soustavy $\mathcal{s}$ vůči $\mathcal{S}$ (tedy přesně v duchu kap. 1.3.1).

4.2.4 Časová změna vektoru $\boldsymbol{\Omega}$

Ať vyjádříme vektor $\boldsymbol{\Omega}$ úhlové rychlosti soustavy $\mathcal{s}$ vůči $\mathcal{S}$ v jedné či druhé soustavě, budou si jeho časové derivace podle obou soustav rovny. Formálně je to vidět podle toho, že $\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$.

4.2.5 Jiná značení

Rozlišení časové derivace v popisu v soustavě $\mathcal{S}$ od popisu v soustavě $\mathcal{s}$ bylo nahoře provedeno dvěma typy závorek $[\ ]_{\mathsf{n}}$, $[\ ]_{\mathsf{i}}$ a užitím velkých, resp. malých písmen pro vektory popisované v $\mathcal{S}$, resp. $\mathcal{s}$. V literatuře se užívá zápisů např.

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{(Trkal, Mechanika HB a TT, 1956)} \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,'\boldsymbol{B}'}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B}' \qquad \text{(Hladík, Analytická mechanika – skripta)} \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,'\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{(Brdička – Hladík, Teoretická mechanika, 1987)} \tag{16}$$

i jiných. V každém případě je podstatný *smysl* užitých symbolů. Jde o následující:

- zachytit skutečnost, že ve zvolené soustavě jsou vždy vektory báze této soustavy časově neproměnné vůči této soustavě, a proto vektor $\dot{\boldsymbol{A}}$ časové změny vektoru $\boldsymbol{A}$ se získá přímo derivací složek A_X, A_Y, A_Z vektoru
- zdůraznit, která soustava byla zvolena pro zápis příslušné veličiny ve vzorci.

4.3 Zrychlení

Aplikujeme-li derivaci podle času opakovaně, dostaneme druhou derivaci – zrychlení. Je tedy

$$\boldsymbol{A} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega}\ \times\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega}\ \times\right)\boldsymbol{r} =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t^2} + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}\,t} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t}\right) + \left(\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r})\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t^2} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}\,t} \times \boldsymbol{r}$$

Členy postupně vyjadřují relativní, Coriolisovo, dostředivé a Eulerovo zrychlení.

5 Obecné polohy soustav

Nechť soustava $\mathcal{s}$ je navíc vůči $\mathcal{S}$ posunuta o $\boldsymbol{R}_0$; značme $\boldsymbol{V}_0 = \mathrm{d}\,\boldsymbol{R}_0/\,\mathrm{d}\,t$. Pak

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{V} = \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}\,t} = \boldsymbol{V}_0 + \frac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}$$

a absolutní zrychlení $\boldsymbol{A}$ lze vyjádřit součtem

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}_r + \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}_u, \qquad \text{kde}$$

$$\boldsymbol{a}_r = \frac{\mathrm{d}^2\,\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\,t^2} \qquad \text{je relativní zrychlení}$$

$$\boldsymbol{a}_C = 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v} \qquad \text{je Coriolisovo zrychlení}$$

$$\boldsymbol{a}_u = \boldsymbol{A_0} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{V_0} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r} \qquad \text{je unášivé zrychlení.}$$

6 Setrvačné síly

Pohybová rovnice $M\boldsymbol{A} = \sum \boldsymbol{F}$ platí v inerciální soustavě; zrychlení $\boldsymbol{a}$ v neinerciální soustavě je rovno $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{a}_\Delta$. Dále platí ovšem $m = M$. V neinerciální soustavě tedy upravíme pohybovou rovnici na tvar

$$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a}_\Delta = \sum \boldsymbol{F} + \boldsymbol{j}, \tag{17}$$

kde zavádíme tzv. *setrvačné síly* (neboli fiktivní, zdánlivé, kinematické) předpisem $\boldsymbol{j} \equiv -m\boldsymbol{a}_\Delta$. Z dostředivého zrychlení vznikne (díky znaménku „−“) **odstředivá síla**, která je rovna $\boldsymbol{F}_{\mathrm{ods}} = -m\Omega^2\boldsymbol{\varrho}$, kde $\boldsymbol{\varrho}$ je polohový vektor s počátkem posunutým po ose rotace tak, aby byl kolmý k $\boldsymbol{\Omega}$; z Coriolisova zrychlení odvodíme **Coriolisovu sílu** $\boldsymbol{F}_{\mathrm{C}} = -2m\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}$ atd. Tyto síly ovšem „působí“ na *všechny* objekty popisované z hlediska neinerciální soustavy. Ty např. z hlediska kolotoče „nutí“ budovy kolem, aby se pohybovaly po kruhových drahách kolem osy kolotoče apod. Jinými slovy, zavedeme-li je, můžeme i z hlediska kolotoče úspěšně popisovat svět, ať už předměty spojené s kolotočem či stojící mimo něj. Odstředivá, Coriolisova i unášivá síla tedy z hlediska Země točící se kolem vlastní osy správně popíšou pohyb Foucaltova kyvadla, stáčení pasátů i pohyby hvězd na obloze.