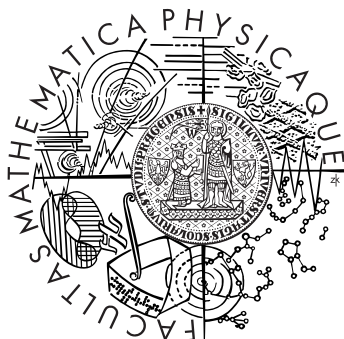


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

DIPLOMOVÁ PRÁCE



Zuzana Horová

Demonstrace základních vlastností šíření vln na datech umělých družic

Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

Studijní program: Fyzika

Praha 2007

Velmi děkuji doc. RNDr. Ondřeji Santolíkovi, Dr. za vedení diplomové práce. Také děkuji ing. Františku Jiříčkovi CSc. za konzultace, zapůjčení své kandidátské práce a především za vyhledání vhodných záznamů z družic.

Za podporu, nejen v době psaní diplomové práce, patří poděkování mým rodičům.

Prohlašuji, že jsem svou diplomovou práci napsala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 24. října 2007

Zuzana Horová

Obsah

Abstrakt	v
Úvod	1
Všechno začalo hvízdáním v telefonu	3
1 Mechanické kmity	4
1.1 Perioda a frekvence	4
1.2 Rovnice kmitání	4
1.3 Amplituda	5
1.4 Úhlová rychlost, úhlová frekvence	5
1.5 Vztah frekvence a úhlové frekvence	6
2 Mechanické vlny	7
2.1 Fázová rychlost vlny	7
2.2 Vlnová délka	8
2.3 Rovnice vlnění	8
2.4 Vlnové číslo	9
2.5 Skládání mechanického vlnění	11
2.6 Vlny příčné a podélné	11
3 Elektromagnetické vlny ve vakuu	12
3.1 Popis elektromagnetických vln	12
3.2 Střídavé elektrické a magnetické pole	12
3.3 Rychlost elektromagnetických vln	14
3.4 Spektrum elektromagnetických vln	14
3.5 Skládání elektromagnetických vln	15
3.6 Polarizované vlny	16
3.7 Nepolarizované vlny	17
4 Elektromagnetické vlny v hmotném prostředí	18
4.1 Index lomu	18
4.2 Vlnová délka a frekvence vlny	18
4.3 Disperze	19
4.4 Izotropní a anizotropní prostředí	20
4.5 Válcově symetrické prostředí	22
4.6 Grupová rychlost	22
4.7 Velikost fázové a grupové rychlosti	27
4.8 Vektor fázové rychlosti	29

4.9	Vlnový vektor	30
4.10	Definice vektoru grupové rychlosti	31
4.11	Grupová rychlost v nedisperzním izotropním prostředí	31
4.12	Směr vektoru grupové rychlosti	33
5	Plazma	35
5.1	Rozdělení rychlostí	35
5.2	Vnitřní energie plynu, střední kvadratická rychlost	36
5.3	Ionizovaný plyn	37
5.4	Stínění nábojů	37
5.5	Co je to plazma?	39
5.6	Plazmové oscilace	40
5.7	Definice plazmatu	42
5.8	Příklady plazmatu na Zemi i mimo ni	42
5.9	Elektromagnetické vlny v plazmatu	43
6	Pohyb částic v magnetickém poli	44
6.1	Lorentzova síla	44
6.2	Neutrální částice	44
6.3	Nabitá částice: pohyb rovnoběžný s magnetickým polem	44
6.4	Nabitá částice: pohyb kolmý na magnetické pole	45
6.5	Poloměr kruhové trajektorie	47
6.6	Cyklotronová frekvence	48
6.7	Nabitá částice: pohyb libovolným směrem	48
6.8	Prostředí tvořené magnetickým polem	49
7	Vlny v plazmatu s magnetickým polem	50
7.1	Mezní frekvence	50
7.2	Rezonance	51
7.3	Elektromagnetické vlny ve směru kolmém na \vec{B}_0	52
7.4	Elektromagnetické vlny rovnoběžné s \vec{B}_0	55
7.5	Vlny v libovolném směru	59
7.6	Vytvoření CMA-diagramu	63
7.7	Složitější CMA-diagram	66
8	Prostředí okolo Země	68
8.1	Ionosféra a jiné sféry	68
8.2	Magnetické pole Země	68

9 Hvizdový mód	69
9.1 Fázová a grupová rychlost vln hvizdového módu	69
9.2 Hvizdy	70
9.3 Hvizdy naměřené na Zemi	73
9.4 Hvizdy z družic	76
9.5 Hvizdový mód z družice Freja	79
9.6 Aurorální sykot	83
Nejsme na konci	89
Závěr	90
Literatura	91
Dodatek	92

Abstrakt

Název práce: Demonstrace základních vlastností šíření vln na datech umělých družic

Autor: Zuzana Horová

Katedra: Katedra didaktiky fyziky

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

E-mail vedoucího: ondrej.santolik@mff.cuni.cz

Abstrakt: Práce vysvětluje vlastnosti mechanických a především elektromagnetických vln na středoškolské úrovni (bez použití diferenciálního a integrálního počtu). Text začíná mechanickým kmitáním, kde jsou mimo jiné zavedeny i nejjednodušší fyzikální veličiny jako je perioda a frekvence. Pokračuje mechanickým vlněním, elektromagnetickými vlnami ve vakuu a v hmotném prostředí (izotropním i anizotropním). Text poté definuje plazma a popisuje šíření elektromagnetických vln plazmatem a plazmatickým prostředím s vnějším magnetickým polem. Závěrečná kapitola se věnuje některým nízkofrekvenčním jevům ze zemské atmosféry doplněné o naměřená data ze Země i družic.

Klíčová slova: elektromagnetická vlna, grupová rychlost, plazma, hvizdy, aurální sykot

Abstract

Title: Demonstration of basic properties of wave propagation using data of scientific spacecraft

Author: Zuzana Horová

Department: Department of Physics Education

Supervisor: doc. RNDr. Ondřej Santolík, Dr.

Supervisor's e-mail address: ondrej.santolik@mff.cuni.cz

Abstract: This thesis explains mechanical and mainly electromagnetic waves at the secondary school level (without using the differential and integral calculus). The text describes mechanical oscillations starting by explanation of very basic physical quantities, as period or frequency. Mechanical waves and electromagnetic waves in vacuum and homogeneous medium (both isotropic and anisotropic) are discussed. The text then defines plasma and describes propagation of electromagnetic waves both in plasma and plasma environment with magnetic field. As examples of these principles low-frequency phenomena in the Earth's atmosphere are described and measured data from the ground-based experiments and from Earth-orbiting spacecraft are shown.

Keywords: electromagnetic waves, group velocity, plasma, whistlers, auroral hiss

Úvod

Text je především určen studentům vyšších ročníků gymnázií, kteří mají o fyziku zájem. Přesto si myslím, že jej mohou využít všichni studenti.

První tři kapitoly mají čtenářům urovnat a navzájem propojit představy o různých typech vln. Studenti, kteří základním vlastnostem rozumí, tyto kapitoly projdou velmi rychle, zastaví se asi až u polarizace.

Čtvrtá část o šíření elektromagnetických vln v hmotném prostředí je obsáhlá a poměrně obtížná – zavádí se pojmy jako grupová rychlost, anizotropní prostředí či vlnový vektor. Studenti se zde setkají s derivací, také s funkcí dvou proměnných a jejími parciálními derivacemi. Myslím, že toto nastínění složitější matematiky jim v budoucím studiu může pomoci.

Následuje kapitola s atraktivním názvem Plazma, kterou začnou číst asi všichni, kterým se text dostane do rukou. V šesté části je velmi podrobně popsáno chování nabitých částic v magnetickém poli. Vektorový součin objevující se v Lorentzově síle jsem příliš nevysvětlovala (na středoškolskou matematiku už prostor nezbyl).

Sedmá část využívá poznatky ze všech předcházejících kapitol. Popisuje šíření elektromagnetických vln v plazmatickém prostředí s vnějším magnetickým polem. Kapitola spěje k vytvoření jednoduchého CMA-diagramu pro studené plazma s nehybnými ionty. CMA-diagram jsem se snažila předložit jako skládačku.

Ve velmi krátké osmé kapitole se čtenáři dovědí, že naše planeta kolem sebe vytváří magnetické pole a že ionosféra tvoří plynulý předěl mezi neutrální Zemí a plazmatickým prostředím okolního vesmíru.

Závěrečná část je věnována především hvizdům. Je vysvětlen jejich vznik a na datech získaných ze Země a z družice Interkosmos jsou ukázány různé typy. Záměrně je zde také zařazen „běžný“ záznam z družice Magion, aby bylo jasné, že družice měří vše a nejen to, co chceme. Na několika dalších grafech je rozebrán třicetiminutový záznam hvizdového módu získaný družicí Freja. V úplném závěru textu je popsán aurorální sykot. Naměřená data jsou z družice Polar.

Čtení textu nepředpokládá znalost středoškolské fyziky, v textu jsou zavedeny i základní pojmy (např. perioda nebo pravotočivost soustavy souřadnic).

Metodika

Při psaní práce jsem se držela myšlenky: Co lze odvodit, odvodit pomalu a srozumitelně, a co odvodit nelze, tak ani nenaznačovat. Úpravy vzorců jsou velmi podrobné, aby si čtenáři nemuseli sami nic ověřovat. Domnívám se, že náznaky odvození, na které studenti ještě nemají matematický aparát, mohou od čtení textu zbytečně odradit. V případech „z nebe spadlých pravd“ jsem se snažila alespoň

o intuitivní objasnění.

Text je psaný bez formálního užití diferenciálního a integrálního počtu. Ovšem, bez veličiny grupové rychlosti definované pomocí derivace by se text o elektromagnetických vlnách neobešel, a tak je derivace zavedena graficky jako sklon grafu. Čtenáři se také okrajově setkají s funkcemi dvou proměnných a jejich parciálními derivacemi v souvislosti s vektorem grupové rychlosti.

Použitá literatura

Elektromagnetické vlny ve studeném plazmatu jsem studovala z prvních kapitol [1] a také vybraných částí z [2]. S hvizdy mi pomohla disertační práce F. Jiříčka [3]. František Jiříček také vyhledal vhodné záznamy z družice Interkosmos 5 a Magion 5, které jsou v práci použity. Ostatní grafy naměřených dat jsem získala z článků O. Santolík ([4] a [5]) a z [6]. Pro úplný závěr textu jsem využila [7].

Vedle zmíněných odborných pramenů jsem použila středoškolskou učebnici [8] a také [9].

Obrázky

Diplomovou práci jsem napsala v programu $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Všechny obrázky, které jsem vytvořila, jsem napsala v programu $\text{M}^{\text{E}}\text{T}^{\text{A}}\text{P}^{\text{O}}\text{S}^{\text{T}}$, přesněji v přídatném balíčku mfpic pro $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$. Mfpic vytvoří zdrojový kód pro $\text{M}^{\text{E}}\text{T}^{\text{A}}\text{P}^{\text{O}}\text{S}^{\text{T}}$ a ten vrací obrázek, který lze vložit do $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ ovského dokumentu. Zdrojové kódy čtyř vybraných obrázků jsou uvedeny v Dodatku.

Práce také obsahuje grafy dat naměřených na Zemi a na družicích Freja, Polar, Interkosmos a Magion. Obrázek 20 je převzatý z [9].

Při psaní práce jsem často využívala [10] a při tvorbě obrázků [11].

Všechno začalo hvízdáním v telefonu

Už v první světové válce při odposlouchávání nepřátelských hovorů byly v telefonu slyšet podivné hvízdavé zvuky, které byly někdy tak intenzivní, že naprosto přehlušily hovor. Zvláštní zvuky (později pojmenované hvizdy) studovali po válce Berkhausen a Eckersley, jejich princip ale vysvětlil až L. R. O. Storey v roce 1953.

Hvizdy vytváří elektromagnetické vlny nízkých frekvencí, které prošly plazmatickým prostředím kolem Země. My si nejdříve vysvětlíme mechanické kmity a vlny (jako jsou vlny na vodní hladině). Od nich přejdeme k vlnám elektromagnetickým procházejících vakuem i hmotným prostředím (třeba vzduchem nebo sklem). Pak přijde na řadu plazma a krátká kapitola o chování nabitých částic v magnetickém poli.

Všechno využijeme v sedmé části, kde se seznámíme s elektromagnetickými vlnami šířícími se kolem Země (plazmatickým prostředím s magnetickým polem). V závěrečné části si objasníme hvizdy a některé další jevy týkající se elektromagnetických vln z okolí Země. Text v poslední části je doplněný o data naměřená na Zemi a také družicemi Freja, Polar a Interkosmos. Jeden graf je z české družice Magion.

Jelikož derivace ani integrály používat nebudeme, nebude možné si všechny uvedené závěry odvodit (pokusíme si je alespoň intuitivně popsat).

Začínáme s pružinkou a závažím.

1 Mechanické kmity

Na pružinu zavěsíme závaží, pružinu natáhneme a pustíme. Závaží začne "létat" nahoru a dolů, nahoru a dolů. . . atd. Takový pohyb nazýváme **mechanické kmitání**.

1.1 Perioda a frekvence

Doba, kterou trvá jeden kmit (z nejvyšší polohy přes nejnižší a zpět do nejvyšší), se nazývá **perioda**. Značí se T a její jednotka je sekunda (s). S periodou je svázaná **frekvence**. Ta nám říká, kolikrát závaží kmitne za jednu sekundu. Frekvenci budeme značit f a její jednotkou je hertz, $1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$.

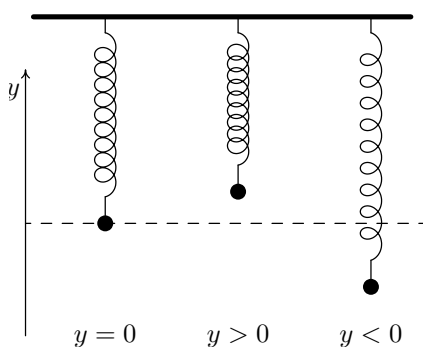
Vztah mezi periodou a frekvencí je velmi jednoduchý (známe-li jedno, snadno určíme druhé)

$$f = \frac{1}{T} \implies T = \frac{1}{f}. \quad (1)$$

Kmitá-li těleso na pružině tak, že za jednu sekundu stihne dva kmity, jeho frekvence je 2 Hz. Z toho vyplývá, že doba jednoho kmitu musí být 0,5 s. A naopak: trvá-li oscilátoru jeden kmit 3 s, jeho perioda je 3 s, potom za jednu sekundu stihne přesně třetinu kmitu a jeho frekvence je $\frac{1}{3}$ Hz.

1.2 Rovnice kmitání

Vodorovná osa na obrázku 1 představuje tzv. rovnovážnou hladinu, místo, kde by se těleso nacházelo, kdyby viselo na pružině a bylo v klidu.



obr. 1: Různé okamžité výchylky

V každém okamžiku kmitání má těleso od osy nějakou vzdálenost, ta odpovídá **okamžité výchylce**. Je-li těleso nad osou má kladnou okamžitou výchylku, je-li pod osou, jeho okamžitá výchylka je záporná.

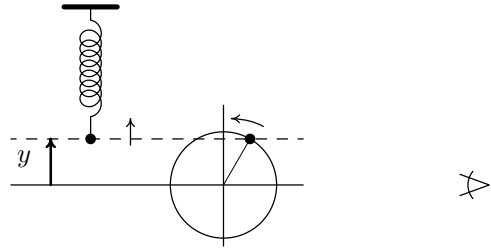
Měnicí se okamžitou výchylku v průběhu kmitání popisuje následující vztah

$$y = A \sin(\omega t). \quad (2)$$

Když si zvolíme konkrétní čas, např. $t = 5 \text{ s}$, pomocí vztahu (2) zjistíme, jak vysoko se závaží v tomto čase nachází. Pro výpočet výchylky y je ovšem vedle času t nutné znát další dvě veličiny A a ω , které v rovnosti vystupují. Obě si vysvětlíme v následujících kapitolách.

1.3 Amplituda

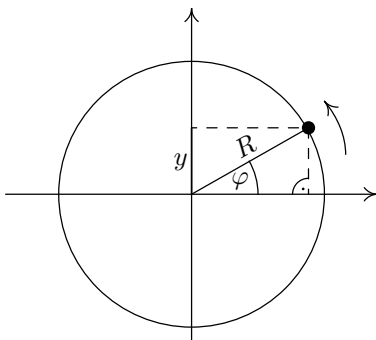
Veličina A určuje **amplitudu**, neboli maximální výchylku. Je-li sinus ve vztahu (2) roven jedné, je okamžitá výchylka rovna výchylce maximální, $y = A$ (těleso je ve svém nejvyšším bodě), je-li sinus roven mínus jedné platí $y = -A$ (závaží se nachází v nejnižším bodě) a je-li sinus roven nule, $y = 0$, oscilátor prochází rovnovážnou polohou, je na vodorovné ose. Funkce sinus nabývá hodnot z intervalu $\langle -1, +1 \rangle$, a tak pravá strana rovnice (2) padne do intervalu $\langle -A, +A \rangle$.



obr. 2: Okamžitá výchylka jako na kružnici

1.4 Úhlová rychlost, úhlová frekvence

Ze vztahu (2) nám ještě zbývá objasnit ω . Pomůže nám rovnoměrný pohyb po kružnici. Podíváme-li se na kroužící kuličku „z boku“ (obr. 2), uvidíme pouze její svislou souřadnici y (výšku). Pohyb, který uvidíme, je stejný jako kmitání kuličky na pružině – poloměr otáčení R je roven maximální výchylce kmitavého pohybu A ($R = A$). Vztah pro y -ovou souřadnici pohybu po kružnici, a tedy i okamžitou výchylku kmitů, je zřejmý z pravoúhlého trojúhelníka na obrázku 3



obr. 3: Souřadnice y na kružnici

Úhel φ nazýváme **okamžitá fáze**. S pohybem kuličky po kružnici se fáze φ zvětšuje. Okamžitou fázi vyjádříme pomocí **úhlové rychlosti** ω . Ta nám říká, o jak velký úhel se změní poloha kuličky \bullet za jednu sekundu, neboli úhel, který kulička uběhne, dělený příslušným časem (jednotka je $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$). Při rovnoměrném pohybu po kružnici, je ω v čase konstantní (za každou sekundu uběhne \bullet stejně dlouhý oblouk).

$$\varphi = \omega t \quad (4)$$

Podobně jako pro rovnoměrný přímočarý pohyb platí $s = vt$, tedy že dráha, kterou bod uběhne, je rychlost násobená časem, tak pro rovnoměrný pohyb po kružnici je $\varphi = \omega t$, uběhnutý úhel se rovná úhlové rychlosti násobené časem.

Dosadíme-li do rovnosti (3) vztahy $\varphi = \omega t$ a $R = A$, vyjde nám rovnice kmitů – vztah (2).

I když se při kmitání nic neotáčí, přesto se v jeho popisu veličina ω používá. Nazývá se **úhlová frekvence** a odpovídá úhlové rychlosti příslušného pohybu po kružnici s poloměrem rovným amplitudě (na obr. 3 je úhlová rychlost pravé kuličky rovna úhlové frekvenci kuličky, která vlevo kmitá). Jednotka úhlové frekvence je s^{-1} .

1.5 Vztah frekvence a úhlové frekvence

Víme, že jedné otočce, tedy jednomu kmitu, odpovídá plný úhel 2π . A také víme, že na jeden kmit je potřeba čas rovný jedné periodě. Použijeme vztah (4) a můžeme zapsat

$$2\pi = \omega T. \quad (5)$$

Rovnost (5) přepíšeme na tvar

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6)$$

A pomocí vztahu (1) také na tvar

$$\omega = 2\pi f. \quad (7)$$

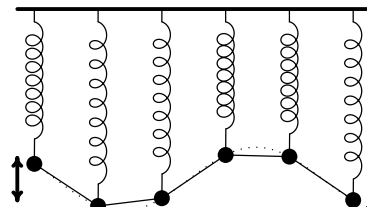
Známe-li libovolný ze tří údajů (frekvence, perioda, úhlová frekvence), jsme schopni zbylé dva určit. Frekvence f a úhlová frekvence ω jsou svázány přímou úměrou – když roste jedna, roste i druhá. Perioda je s f i ω nepřímo úměrná.

Na závěr kapitoly

Lze-li kmitání popsat vztahem (2) tzn. má-li sinusový průběh, nazveme ho **harmonickým**. Kmitající závaží je pak **harmonický oscilátor**.

2 Mechanické vlny

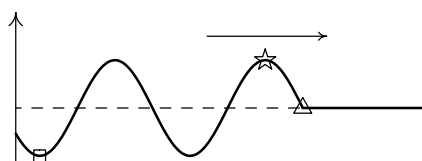
Představme si několik stejných pružinek (stejně dlouhých a „tuhých“), na každou z nich zavěsíme závaží o jediné hmotnosti. Pružinky dáme do řady vedle sebe a každé závaží spojíme s jeho sousedy provázkem. Rozkmitáme-li první závaží, díky spojovacím provázkům se postupně rozkmitají všechna závaží. Vznikne **postupná vlna** (obr. 4). Kmitání všech oscilátorů je stejně „rychlé“ - mají stejnou frekvenci a tedy i úhlovou frekvenci.



obr. 4: Vznik postupné vlny

2.1 Fázová rychlost vlny

Na obrázku 5 je postupná vlna, která se šíří ve směru šipky. Zaměříme se na první vrcholek vlny označený hvězdičkou a budeme ho sledovat. Bude „přeskakovat“



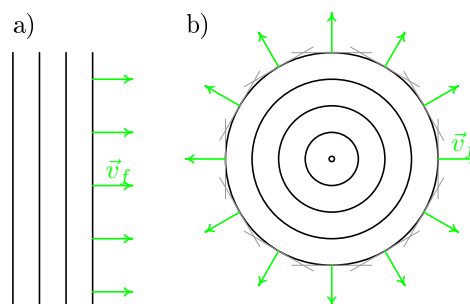
obr. 5: Fázová rychlost

z jednoho závaží na druhé směrem doprava. Je vždy na takovém oscilátoru, ke kterému se vlnění dostalo teprve před chvílkou a stihlo jen čtvrtinu jednoho kmitu (z klidu do nejvyšší polohy). To odpovídá fázi (úhlu) $\frac{\pi}{2}$. Kdybychom sledovali třeba začátek vlny označený trojúhelníčkem, zaměřili bychom se na fázi rovnou nule (takové oscilátory jsou těsně před rozkmitáním). Hvězdičce i trojúhelníčku připadá jiná fáze, ale jejich rychlosti jsou stejné. Společná rychlost všech fází vlny, **fázová rychlost**, se označuje v_f , její jednotka je $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. (Dále se setkáme ještě s grupovou rychlostí vlny.) Kdybychom sledovali druhé údolí vlny označené čtverečkem, šlo by o fázi $\varphi = 2\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{7}{2}\pi$.

Místa se stejnou stejnou fází nazýváme **vlnoplochy**. Kámen vhozený do vody vyvolá vlnění, jehož vlnoplochy jsou kružnice se středem v místě dopadu. Když vytřepáváte za dva rohy deku, na které jste seděli v trávě, vlnoplochy jsou úsečky rovnoběžné se spojnicí vašich rukou. Na laně má každý bod jinou fázi, a tak je každý jednou vlnoplochy (ovšem u takového vlnění se termín nepoužívá).

Vlnoplochy se prostorem šíří fázovou rychlostí, která vždy směřuje kolmo na ně (obr. 6a).

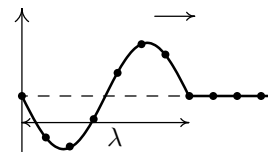
U kružnic na vodní hladině je třeba vytvořit tečny (na obrázku 6b šedě) a teprve k nim kolmice.



obr. 6: Vlnoplochy a jejich rychlost

2.2 Vlnová délka

Vrátíme se zpět k závažím na pružinkách navzájem spojených provázky. První závaží vykoná svůj první kmit za dobu jedné periody. Za tuto dobu se kmitavý pohyb díky provázkům rozšíří až k závaží, které je od prvního vzdálené jednu **vlnovou délkou**. Situaci vidíme na obrázku 7. Vlnovou délku budeme značit řeckým písmenem λ (lambda), její jednotka je metr (jde o vzdálenost).



obr. 7: Vlnová délka

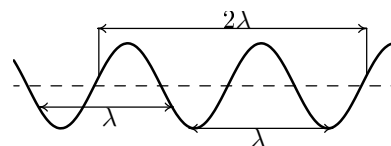
Podobně jako platí $s = vt$, tak pro vlnovou délku můžeme psát

$$\lambda = v_f T, \quad (8)$$

kde v_f je rychlost šíření vlny a T je perioda. Použijeme-li rovnost (1), pak můžeme vztah (8) přepsat na tvar

$$\lambda = \frac{v_f}{f}. \quad (9)$$

Na obrázku 8 je postupná vlna zachycená v jednom okamžiku. Každé dva oscilátory, které jsou od sebe vzdáleny o jednu vlnovou délku λ , nebo o libovolný jiný násobek vlnové délky ($2\lambda, 3\lambda \dots$), kmitají spolu. Jejich okamžité výchylky jsou si v každém okamžiku rovny. Říkáme, že takové dva oscilátory kmitají **ve fázi**.



obr. 8: Dvojice oscilátorů ve fázi

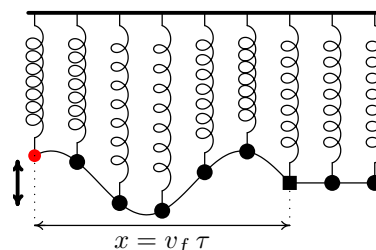
Vlnovou délka definujeme jako vzdálenost dvou nejbližších závaží (oscilátorů), které kmitají ve fázi.

2.3 Rovnice vlnění

Na obrázku 9 je zdrojem vlnění červené kmitající závaží, jehož vodorovnou souřadnici x položíme rovnou nule. Jeho kmity popíšeme vztahem (2), který jsme si už odvodili:

$$y = A \sin(\omega t)$$

Všetchna ostatní závaží kmitají se stejnou úhlovou frekvencí, ale každé začalo v jiném čase. Zaměříme se na oscilátor ve tvaru krychličky, který je od prvního v řadě vzdálený o vzdálenost x . Dobu τ , kterou čeká, než se k němu vlnění dostane, vyjádříme



obr. 9: Zpoždění oscilátoru

$$\tau = \frac{x}{v_f}. \quad (10)$$

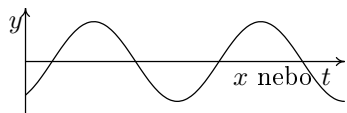
Oproti červenému závaží krychlička začne kmitat o dobu τ později, jeho rovnice je

$$y = A \sin(\omega(t - \tau)) = A \sin(\omega(t - \frac{x}{v_f})) \implies y = A \sin(\omega t - \frac{\omega}{v_f} x). \quad (11)$$

Vztah (11) popisuje pohyb oscilátoru, jehož rovnovážná poloha je od počátku vzdálená x . Chápeme-li nyní x jako parametr, pak rovnice (11) popisuje kmitání libovolného oscilátoru – když za x dosadíme konkrétní vzdálenost, třeba $x = 12$ cm, vyjde nám rovnice kmitů závaží, které je od zdroje vlnění vzdáleno 12 cm. V rovnici (11) jsou tedy ”schované” kmity všech oscilátorů (vpravo od zdroje). Odvodili jsme rovnici vlny, která se šíří po směru osy x .

Okamžitá výchylka y (rovnice (11)) je funkcí dvou proměnných, času t a vzdálenosti od zdroje x . Chcete-li y spočítat, musíte určit konkrétní oscilátor (proměnná x) a také čas, který vás zajímá (proměnná t).

Zafixujeme-li pouze x , například $x = 2$ m, dostaneme rovnici kmitů oscilátoru vzdáleného dva metry od zdroje. Zafixujeme-li t , například $t = 5$ s, dostaneme předpis vlny, kterou bychom vyfotili v době pět sekund po začátku.



obr. 10: Záznam vlny nebo průběh jednoho oscilátoru v čase

Z důvodu, že je rovnice vlnění funkcí času i prostoru zároveň, nelze celé vlnění namalovat na papír. Nakreslíte-li sinusoidu jako je na obrázku 10, může popisovat dvě různé věci. Záleží na veličině, která je na vodorovné ose.

Je-li zde proměnná x (prostorová souřadnice), potom sinusoida zachycuje vlnu v jednom konkrétním okamžiku (fotografie vlny). Je-li na vodorovné ose čas, graf nám ukazuje časový průběh kmitání pouze jednoho konkrétního oscilátoru.

Znaménko plus v argumentu funkce sinus $y = A \sin(\omega t + \frac{\omega}{v_f} x)$ by znamenalo, že se vlna šíří opačným směrem (doleva proti směru osy x).

Vlna, která se dá popsat funkcí sinus, je vlna **harmonická**.

2.4 Vlnové číslo

Poměr $\frac{\omega}{v_f}$ označíme k a nazveme jej vlnové číslo (jednotka je $\frac{s^{-1}}{m \cdot s^{-1}} = m^{-1}$). Rovnice (11) přejde v používanější tvar rovnice vlny

$$y = A \sin(\omega t - kx). \quad (12)$$

Rovnice (12) tedy popisuje vlnění, které se šíří ve směru osy x s úhlovou frekvencí ω a vlnovým číslem k definovaným

$$k = \frac{\omega}{v_f}. \quad (13)$$

Ukážeme si, co nám vlnové číslo vlastně říká. Do vztahu (13) dosadíme vztah (6) $\omega = \frac{2\pi}{T}$ a také (8) $v_f = \frac{\lambda}{T}$. Dostaneme

$$k = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{\lambda}{T}} \implies k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (14)$$

Zlomek $\frac{1}{\lambda}$ udává, kolik vlnových délek se vejde do jednoho metru. Vlnové číslo tedy určuje, kolik vln se vejde do 2π metrů (přibližně tedy do 6,28 m).

Příklad

Rozebereme si vlnění, které popisuje rovnice: $y = 0,2 \sin(4\pi t - \frac{4\pi}{3}x)$ m.

Tuto rovnici porovnáme s rovnicí postupného vlnění: $y = A \sin(\omega t - kx)$.

- V argumentu funkce sinus je proměnná x a před ním je záporné znaménko. Vlna se šíří ve směru osy x . Výchyšky jsou do osy y .
- Maximální výchylku vidíme hned: $A = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$.
- Z rovnice snadno určíme úhlovou frekvenci: $\omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$.
- Vlnové číslo je také snadné: $k = \frac{4\pi}{3} \text{ m}^{-1}$. Do vzdálenosti 2π metrů se tedy vejde přesně $\frac{4\pi}{3}$ vln; do každého metru pak $\frac{2}{3}$ vlny ($\frac{2}{3} = \frac{4\pi}{3 \cdot 2\pi}$).
- Z definice vlnového čísla, určíme fázovou rychlost šíření vlny: $k = \frac{\omega}{v_f} \implies v_f = \frac{\omega}{k}$. Číselně: $v_f = \frac{4\pi}{\frac{4\pi}{3}} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \implies v_f = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.
Za každou sekundu se vlna rozšíří o tři metry dál od zdroje vlnění.
- Ze vztahu (7) $\omega = 2\pi f$, určíme frekvenci: $4\pi = 2\pi f \implies f = 2 \text{ Hz}$.
Za jednu sekundu každý oscilátor stihne dva kmity. Za každou sekundu se vlnění rozšíří o dvě sinusové vlny dál.
- Z frekvence spočítáme periodu ($T = \frac{1}{f}$): $T = \frac{1}{2} \text{ s} = 0,5 \text{ s}$
Jeden kmit trvá každému oscilátoru půl sekundy.
- Zbývá určit vlnovou délku, použijeme třeba vztah (8) $\lambda = v_f T$:
 $\lambda = 3 \cdot 0,5 \text{ m} \implies \lambda = 1,5 \text{ m}$.
Jedna sinusová vlna je dlouhá 1,5 m.

V rovnici vlny jsou ukryty všechny informace o daném vlnění.

2.5 Skládání mechanického vlnění

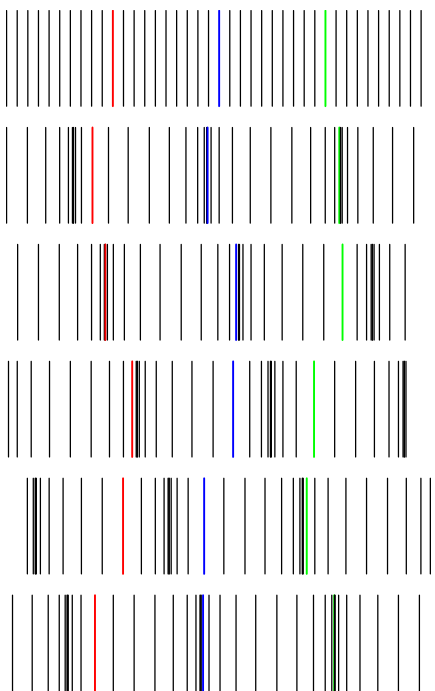
Hodíte-li kámen do rybníka, vznikne vlnění, které se šíří od místa dopadu kamene. Hodíte-li do rybníka kameny dva, třeba metr a půl od sebe s odstupem jedné sekundy, dopad každého z nich je zdrojem vlnění. To, co uvidíte jako výsledný obraz hladiny, vznikne prostým součtem obou vlnění.

Zaměříme se na jedno konkrétní místo na hladině v daném konkrétním čase. V tomto místě a čase je okamžitá výchylka vlny vytvořené prvním kamenem například $+11$ cm. Vlnění z druhého kamene vytvoří ve stejném místě i čase výchylku -7 cm. Potom výsledek, který na rybníce uvidíme, je hladina ve výšce 4 cm nad nulovou hladinou (klidnou hladinou). Jednotlivé výchylky jsme sečetli: $11 + (-7) = 4$. V případě, že výchylka z prvního vlnění bude -8 cm a z druhého -14 cm, ve výsledku uvidíme v daném místě a čase hladinu 22 cm pod klidnou hladinou.

Důležitá poznámka: Všechny vlny, kterými se budeme zabývat, budeme považovat za **harmonické** nebo za takové, že se dají z harmonických vln složit.

2.6 Vlny příčné a podélné

Příklad s pružinkami, závažími a provázky je příkladem vlnění **příčného**, kdy jednotlivé oscilátory kmitají kolmo na směr šíření vlny (obr. 4 nebo 5 – závaží se pohybují nahoru a dolů a vlna jde doprava). Dalším příkladem příčného vlnění je vlna na rybníce, vlna na provaze nebo na struně u kytary.



obr. 11: Podélná vlna

Druhý typ vlnění se nazývá **podélné**. Při takovém vlnění oscilátory kmitají ve stejném směru, kterým se šíří sama vlna.

Podélnou vlnou je například vlna zvuková, při které se střídavě zhušťuje a zřeďuje hmotné prostředí (například vzduch). První část obrázku 11 zobrazuje prostředí, ve kterém se momentálně zvuk nešíří. Svislé čáry, které představují vrstvy vzduchu, mají stejné rozestupy – vzduch má všude stejnou hustotu.

Další části odpovídají různým časům stejného prostředí s procházející podélnou zvukovou vlnou. Tři vrstvy jsou barevně zvýrazněny, abychom viděli, že se jednotlivé vrstvy nikam nepřesouvají (ve vzduchu nefouká vítr). Všechny kmitají kolem svých rovnovážných poloh (daných nejvyšším obrázkem), vzájemnými nárazy vrstev se zvuk šíří doprava – zhuštěná místa se prostorem přesouvají.

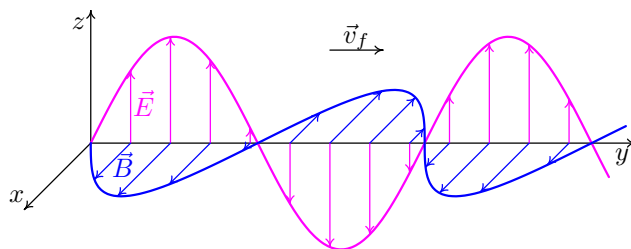
3 Elektromagnetické vlny ve vakuu

Od mechanických vln s pružinkami a závažími se nyní přesuneme k vlnám elektromagnetickým. Setkáváme se s nimi na každém kroku – radiové vlny, mikrovlny, světlo nebo třeba rentgenové záření jsou příklady elektromagnetických vln.

3.1 Popis elektromagnetických vln

Při elektromagnetickém vlnění se nehýbají žádné částice, nekmitají žádné oscilátory. To, co se "hýbe", přesněji zvětšuje a zmenšuje, je elektrické a magnetické pole.

Na obrázku 12 vidíme elektromagnetickou vlnu, která se šíří **vakuumem**. Je složena z vlny elektrické intenzity¹ \vec{E} (na obrázku kmitající svisle zobrazena růžově) a magnetické indukce \vec{B} (modře, kmitající vodorovně). V elektromagnetické vlně ve vakuu vektory \vec{E} a \vec{B} kmitají **ve fázi** (kmitají „spolu“)



obr. 12: Elektromagnetická vlna v jediném okamžiku

a oba tvoří příčné vlnění. Délky vektorů \vec{E} a \vec{B} srovnávat nemůžeme. Elektrickou intenzitu měříme ve voltech na metr ($\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$) a jednotkou magnetické indukce je tesla (T).

V elektromagnetické vlně v každém okamžiku (s výjimkou nulových bodů) vektory \vec{E} , \vec{B} a vektor fázové rychlosti \vec{v}_f (v tomto pořadí) tvoří **pravotočivou soustavu souřadnic**. Představme si hodinky ukazující přesně tři hodiny. Malá ručička mířící ke třetí hodině představuje směr prvního vektoru, velká ke dvanáctce ukazuje jako druhý vektor. Pokud třetí vektor soustavy vystupuje z hodinek přímo k nám, pak tyto tři vektory tvoří pravotočivou soustavu souřadnic. Když třetí vektor směřuje za hodinky, soustava je levotočivá. Na určení pravotočivosti se často používá pravá ruka. Zahnuté prsty ukazují směr od prvního vektoru k druhému a natažený palec pak určuje vektor třetí.

3.2 Střídavé elektrické a magnetické pole

Elektrické pole vlny z obrázku 12 kmitá rovnoběžně s osou z a šíří se ve směru osy y . Amplitudu označíme E_A (elektrické pole pak nabývá hodnot v rozmezí $\langle -E_A, E_A \rangle$). Rovnice popisující kmitání elektrické intenzity na obrázku 12 je analogická s rovnicí

¹Správný název veličiny \vec{E} je **intenzita elektrického pole**. Pro stručnost budeme v celém textu používat běžné, ale nepřesné pojmenování, elektrická intenzita.

pro mechanické vlny

$$E_z = E_A \sin(\omega t - ky). \quad (15)$$

Složky elektrické intenzity do osy x a y jsou stále nulové (pole kmitá pouze podél osy z). Vektor \vec{E} můžeme zapsat

$$\vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = (0, 0, E_A \sin(\omega t - ky)). \quad (16)$$

Podobně zapíšeme vektor magnetické indukce. Vektor \vec{B} kmitá podél x a šíří se stejně jako \vec{E} , ve směru y . Složku x vektoru magnetické indukce vyjádříme

$$B_x = B_A \sin(\omega t - ky). \quad (17)$$

B_A značí amplitudu magnetického pole. Celý vektor \vec{B} má tvar

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (B_A \sin(\omega t - ky), 0, 0). \quad (18)$$

Pro délky vektorů \vec{E} a \vec{B} v elektromagnetické vlně platí vzájemný vztah

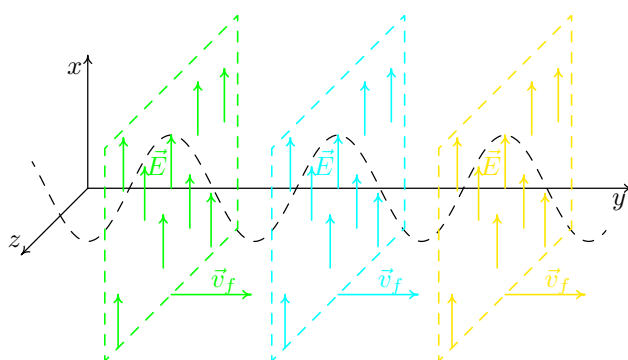
$$|\vec{E}| = c|\vec{B}|, \quad (19)$$

který si nebudeme odvozovat. Konstanta c je rychlost světla ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$), kterou se budeme zabývat v příští části. Rovnost (19) platí pro velikosti vektorů \vec{E} a \vec{B} v libovolném okamžiku, tedy i v momentě, kdy jsou oba vektory maximální

$$E_A = cB_A. \quad (20)$$

V některých obrázcích bude kvůli přehlednosti elektromagnetická vlna zakreslena bez své magnetické složky, pouze pomocí elektrického pole a směru fázové rychlosti \vec{v}_f . Chybějící magnetická složka vlny se dá do takového obrázku jednoznačně zakreslit. Vektor \vec{B} je kolmý na \vec{E} i \vec{v} a dohromady (v tomto pořadí \vec{E} , \vec{B} a \vec{v}) tvoří pravotočivou soustavu souřadnou.

Ve většině případů budeme uvažovat **rovinnou** elektromagnetickou vlnu. Elektrické a magnetické pole rovinné vlny působí ve všech bodech prostoru, nejen na přímce, jak je na obr. 12. Její vlnoplochy jsou navzájem rovnoběžné roviny, kolmé na směr fázové rychlosti vlny. V každém místě jedné vlnoplochy je elektrická (i magnetická) složka stejně velká. Na obrázku 13 je elektromagnetická rovinná vlna (zakreslená pouze pomocí elektrické složky). Zobrazené barevné vlnoplochy jsou místa s maximální E (i B).



obr. 13: Rovinná elektromagnetická vlna

3.3 Rychlost elektromagnetických vln

Každá elektromagnetická vlna se ve vakuu šíří rychlostí, kterou označujeme písmenem c ,

$$c = 299\,792\,458 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}. \quad (21)$$

Hodnota $3 \cdot 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ se od přesné liší pouze o 0,07 %.

Této rychlosti sice říkáme rychlost světla, ale šíří se jí všechny typy elektromagnetických vln (radiové, mikrovlny, infračervené...). Pro libovolné vlnění platí vztah (9) $v_f = \lambda f$. Pro elektromagnetické vlnění pak platí

$$c = \lambda f. \quad (22)$$

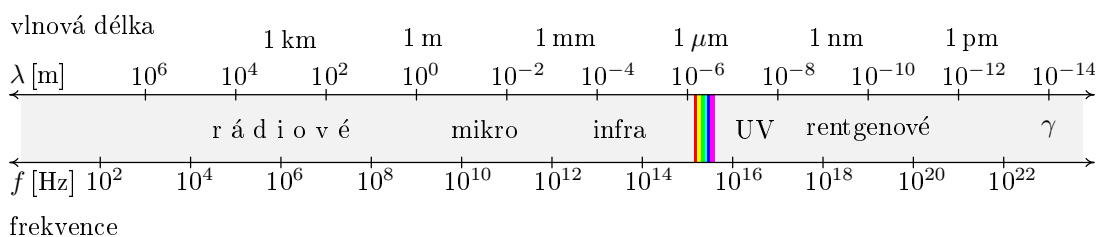
Jelikož c je konstanta, roste-li frekvence f , klesá vlnová délka λ a naopak. Známe-li vlnovou délku elektromagnetické vlny ve vakuu, pomocí vztahu (22) jednoznačně určíme její frekvenci a naopak.

3.4 Spektrum elektromagnetických vln

Nejdůležitější dělení elektromagnetických vln je podle vlnové délky (resp. frekvence). Některé typy vln jsme uvedli už na začátku této části. Všechny dohromady tvoří **spektrum** elektromagnetických vln. Hranice mezi jednotlivými typy nejsou ostré – jeden volně přechází v druhý nebo se mohou i překrývat.

Elektromagnetické vlny s vlnovou délkou řádově od centimetrů až po kilometry nazýváme **radiové**. Pro televizní vysílání se využívají vlny o vlnové délce 0,1 m až 1 m. Mobilní telefony vysílají a přijímají elektromagnetické vlny s vlnovou délkou 33 cm nebo 16 cm. Jejich frekvence je 0,9 nebo 1,8 GHz (elektrické i magnetické pole kmitne řádově 10^9 krát za 1 s).

Vlnová délka v řádu desítek centimetrů až milimetrů odpovídá **mikrovlnám**. Večeři v mikrovlnce nám ohřívají vlny s vlnovou délkou přibližně 12 cm. Bezdrátové připojení k internetu WiFi pracuje na podobné frekvenci 2,4 GHz ($\lambda \doteq 13$ cm).



obr. 14: Spektrum elektromagnetických vln

Na mikrovlny navazují **infračervené** vlny s vlnovými délkami přibližně mezi 1 mm a 770 nm. Infračervené vlny vyzařují všechna teplejší tělesa. Čím je větší teplota tělesa, tím je kratší vlnová délka vyzařovaných vln. Lidi nebo zvířata můžete

vidět infračerveným dalekohledem i ve tmě, protože z nich sálají vlny s jinou vlnovou délkou než z jejich studeného okolí. Dalekohled infračervené vlny převede na vlny pro nás viditelné. Tělesům s teplotou přibližně 900 K odpovídají už tak krátké vlnové délky, že je dokáže vnímat naše oko (na infračervené vlny navazuje viditelné světlo), například kovář ková tak horké podkovy, že svítí červeně.

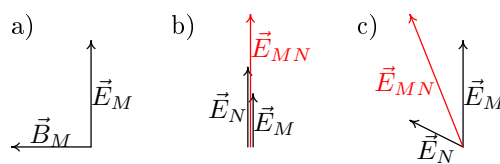
Pro člověka je důležitá velmi uzounká oblast vlnových délek od 390 nm do 770 nm, které připadají **viditelnému světlu**. Červené barvě odpovídají nejdelší vlnové délky, které můžeme vidět. O něco kratší vlnovou délku má oranžové světlo, ještě kratší žluté světlo, pak zelené a modré. Nejkratší viditelné vlnové délky patří fialové barvě. Lidské oko nejcitlivěji reaguje na žlutozelenou barvu o vlnové délce kolem 550 nm. Téměř 2 miliony „žlutozelených vlnek“ se vejdu do jednoho metru, elektrické pole kmitne řádově 1 000 000 000 000 000krát každou sekundu.

Kratší vlnové délky (řádově 100 nm = 10^{-7} m), které naše oko už nevnímá, patří **ultrafialovému záření**. Na ultrafialové vlny (angl. ultraviolet, zkr. UV) ze Slunce reaguje naše kůže zhnědnutím (nebo zčervenáním). Ještě kratší vlnové délky (10^{-8} m až 10^{-12} m) odpovídají **rentgenovým vlnám**. Vlnami s vlnovou délkou z intervalu (10^{-10} m, 10^{-12} m) se rentgenuje v nemocnici – vlny prochází svalovou hmotou, ale od kostí se odráží. Elektromagnetické vlny o vlnové délce kolem 10^{-14} m nazýváme **γ -záření**. Takové vlny vznikají například při rozpadu atomových jader.

Spektrum elektromagnetických vln není omezené, vlnová délka i frekvence může mít libovolnou kladnou hodnotu.

3.5 Skládání elektromagnetických vln

Představme si, že elektromagnetická vlna, nazvaná písmenem M , se šíří přímo proti nám. Vektor její elektrické intenzity \vec{E}_M kmitá ve svislém směru nahoru a dolů a vektor magnetické indukce \vec{B}_M kmitá vodorovně doleva a doprava (obr. 15a). Nyní si představme, že s vlnou M se k nám stejným směrem šíří také elektromagnetická vlna N , která má stejnou vlnovou délku (tudíž i frekvenci) jako M . (Vlny na obrázcích 15b a 15c k následujícím příkladům jsou namalované bez vektorů magnetické indukce \vec{B} .)



obr. 15: Elektrická a magnetická složka vln; skládání dvou vln

Příklad první

Vektory elektrických intenzit obou vln \vec{E}_M i \vec{E}_N kmitají ve fázi ve svislém směru, situaci znázorňuje obr. 15b. Vektor \vec{E} výsledné vlny bude kmitat také ve svislém

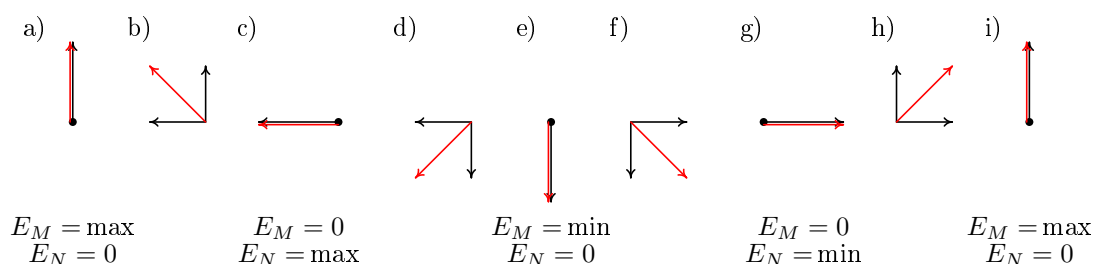
směru. V libovolném čase jeho délku získáme sečtením okamžitých délek vektorů \vec{E}_M a \vec{E}_N . Jeho amplituda bude rovna součtu amplitud vln M a N ($E_A = E_{MA} + E_{NA}$).

Příklad druhý

Elektrické pole vlny M necháme kmitat svisle. Vektor \vec{E}_N vlny N bude kmitat "šikmo" a ve fázi s M . V každém čase výsledný vektor \vec{E} vznikne vektorovým součtem vektorů \vec{E}_M a \vec{E}_N , jak vidíme na obr. 15c.

Příklad třetí

Představme si, že vektor elektrického pole vlny M stále kmitá nahoru a dolů. Elektrická složka vlny N kmitá vodorovně, doprava a doleva. Amplitudy obou vlny mají stejnou velikost ($E_{MA} = E_{NA}$). A teď pozor: Elektrické intenzity vln M a N nekmitají ve fázi, jsou navzájem posunuté o čtvrt kmitu (o úhel $\frac{\pi}{2}$) tak, že vlna M jde před vlnou N . Na obrázku 16 vidíme, jak to vypadá ve vybraných časech. Když je M v maximu, N teprve otáčku začíná (16a); M klesne na nulu a N právě došla do maxima (16c); M je v maximální záporné hodnotě, N je na nule (16e); M je v rovnovážné poloze, N je v maximální záporné hodnotě (16g)... tak stále.



obr. 16: Kruhově polarizovaná vlna složená ze dvou lineárně polarizovaných

Stejně jako v předchozích případech vektor \vec{E} složené vlny vznikne vektorovým součtem vektorů \vec{E}_M a \vec{E}_N . Výsledkem je, že vektor \vec{E} této složené vlny bude mít stále stejnou délku a jeho koncový bod bude obíhat po kružnici s poloměrem rovným amplitudě vlny M (či N). Kdybychom se nedívali přímo zepředu (jak se vlna šíří přímo na nás), jako trajektorii bychom viděli šroubovici (běhá po kružnici a přitom se rovnoměrně posunuje).

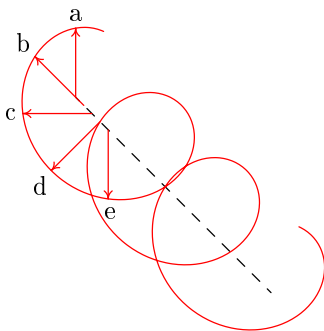
3.6 Polarizované vlny

V této kapitole se odkazujeme na příklady z minulé části o skládání vln. Výsledné vlny z prvního i druhého příkladu jsou vlny **lineárně polarizované**, to znamená,

že vektor jejich elektrické intenzity kmitá pouze v jedné rovině. V prvním příkladu výsledný vektor \vec{E} kmital ve svislé rovině, ve druhém příkladu v rovině „šikmé“.

Lineárně polarizované nebyly jenom dvě výsledné vlny, ale také vlny M a N ze všech tří příkladů (vlna M kmitala vždy svisle, N nejdřív svisle, pak šikmo a nakonec vodorovně).

Ve třetím příkladě složením vln M a N vychází vlna **kruhově polarizovaná**. Výsledný vektor \vec{E} má stále stejnou délku a z pohledu zepředu opisuje kružnici.



obr. 17: Kruhově polarizovaná vlna

V prostoru běží po šroubovici, kterou zobrazuje obrázek 17 – polohy a až e odpovídají obrázkům 16a až 16e, další polohy nejsou označeny kvůli přehlednosti obrázku.

Je-li ve vlně lineárně polarizovaný vektor elektrické intenzity, musí být lineárně polarizovaný i její vektor magnetické indukce. Rovina polarizace \vec{B} je kolmá na rovinu polarizace \vec{E} . Je-li \vec{E} kruhově polarizované, potom i konec vektoru \vec{B} běhá po kružnici, resp. po šroubovici.

Kdyby ve třetím příkladě byla amplituda jedné vlny menší než amplituda vlny druhé, vznikla by **elipticky polarizovaná** vlna. Koncový bod vektoru \vec{E} by z pohledu zepředu běhal po elipse. Pro $\vec{E}_{MA} < \vec{E}_{NA}$ by elipsa ležela, v opačném případě by stála jako vejce na špičce.

3.7 Nepolarizované vlny

Když rozsvítíme doma lustr, světlo ze žárovky se rozšíří všemi směry. Můžeme si představit, že vlákno žárovky je složeno z obrovského množství malinkatých, navzájem nezávislých zdroječků elektromagnetického vlnění, které nekmitají ve fázi. Z každého zdroječku vychází nějak polarizovaná elektromagnetická vlna. Každou jednotlivou vlnu bychom snadno popsali rovnicí. Ovšem složením takového množství různě posunutých vln, jejichž vektory \vec{E} kmitají do všech stran, vzniká chaotické kmitání \vec{E} do všech směrů. Takové vlnění nazýváme **nepolarizované**. Světlo, se kterým se běžně setkáváme (ze Slunce, ze žárovek...), je nepolarizované.

4 Elektromagnetické vlny v hmotném prostředí

V předchozí části jsme popsali šíření elektromagnetické vlny vakuem. Taková vlna není ničím ovlivňovaná. Není zpomalovaná ani tlumená a šíří ve všech směrech stejnou rychlostí c . Jakmile se dostane do hmotného prostředí, její šíření se změní.

4.1 Index lomu

Prochází-li elektromagnetická vlna hmotným prostředím, atomy a molekuly prostředí brání vlně v hladkém průchodu. Míru, jakou se fázová rychlost vlny zmenší oproti c , určuje veličina, kterou nazýváme **index lomu**. Index lomu n je pro dané prostředí definován

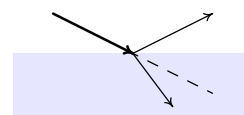
$$n = \frac{c}{v_f}, \quad (23)$$

kde c je rychlost vlny ve vakuu a v_f je velikost fázové rychlosti v prostředí. Čím větší je index lomu, tím menší je rychlost vlny v prostředí. Prostředí s velkým indexem lomu více brání průchodu vln. Říkáme, že je opticky² husté. Index lomu je bezrozměrná veličina (je to poměr dvou rychlostí).

Vzduch za normálních podmínek (při daném tlaku, teplotě a vlhkosti) má index lomu velmi blízký jedničce $n = 1,000\,272$. Elektromagnetické vlny procházející vzduchem jsou téměř stejně rychlé jako ve vakuu. Rychlost elektromagnetických vln ve vodě je $225\,000\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($n = 1,33$) a ve skle $200\,000\,000\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ($n = 1,53$).

Poznámka: Dále si ukážeme, že v plazmatu může být index lomu menší než jedna, fázová rychlost vln je pak překvapivě větší než c (stále ve shodě s předpoklady teorie relativity).

Dopadá-li paprsek světla šikmo na vodní hladinu, rozdělí se na dva slabší paprsky, obr. 18. Jeden se od hladiny odrazí pod stejným úhlem pod jakým původní paprsek na hladinu dopadl. Druhý se na hladině zlomí a prochází do vody. Čím větší je index lomu prostředí, do kterého se paprsek láme, tím více se paprsek odklání od svého původního směru (na obrázku čárkovaně). Z tohoto důvodu se veličina n nazývá index lomu.



obr. 18: Odraz a lom

4.2 Vlnová délka a frekvence vlny

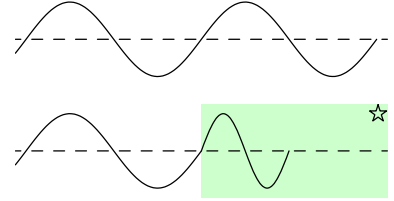
Vstoupí-li elektromagnetická vlna do libovolného hmotného prostředí, její frekvence se nezmění. Spolu s frekvencí se zachová perioda T , která je s frekvencí f spojena

²Přestože zabraňuje průchodu všem elektromagnetickým vlnám (nejen optickým, ale i radiových i rentgenových), používá se termín opticky husté.

rovnici (1) $T = \frac{1}{f}$. Úhlová frekvence ω , daná vztahem (7) $\omega = 2\pi f$, zůstává také beze změn.

S poklesem fázové rychlosti vlny při vstupu do hmotného prostředí se zmenšuje vlnová délka. Vytváří-li se jednotlivé vlnky ve stejném tempu a vlna se nedostane tak daleko, vlnky musí být kratší.

Tyto úvahy zapíšeme rovnicemi. Na obrázku 19 vidíme, jak elektromagnetická vlna s frekvencí f přechází z vakua, do „ohvězdičkového“ prostředí. Ve vakuu dle rovnice (22) platí $f = \frac{c}{\lambda}$, v prostředí pak $f = \frac{v_f^*}{\lambda^*}$. Jelikož se frekvence zachovává, vztahy můžeme dát do rovnosti a získáme rovnici pro vlnovou délku v hmotném prostředí



obr. 19: Změna λ v prostředí

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{v_f^*}{\lambda^*} \Rightarrow \lambda^* = \lambda \frac{v_f^*}{c}. \quad (24)$$

Kolikrát pomaleji se vlna prostředím šíří, tolikrát má oproti vakuu kratší vlnovou délku. Pomocí definice indexu lomu $n^* = \frac{c}{v_f^*}$ získáme přehlednější tvar

$$\lambda^* = \lambda \frac{c}{v_f^*} \Rightarrow \lambda^* = \lambda \frac{1}{n^*} \Rightarrow \lambda^* = \frac{\lambda}{n^*}, \quad (25)$$

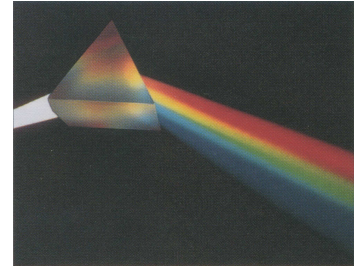
kde „ohvězdičkované“ proměnné přísluší hmotnému prostředí a λ značí vlnovou délku vlny ve vakuu. Hmotné prostředí na obrázku 19 má index lomu roven 2, velikost fázové rychlosti klesla na polovinu, na polovinu se také zkrátila vlnová délka.

Zabýváme-li se vlnami v hmotných prostředích, bývá zvykem namísto vlnové délky λ vlnu charakterizovat její frekvencí f nebo úhlovou frekvencí ω , $\omega = 2\pi f$, které jsou pro konkrétní vlnu ve všech prostředích stále stejné.

4.3 Disperze

Rychlost elektromagnetické vlny procházející prostředím často záleží nejen na daném prostředí, ale také na vlně samotné – konkrétně na její frekvenci. Nejkrásnějším důkazem tohoto tvrzení je duha. Světlo ze Slunce je složeno z elektromagnetických vln o různých frekvencích, kterým odpovídají jednotlivé barvy. Šíří-li se všechny dohromady, vnímáme je jako bílé světlo. Dopadne-li světlo na vodní kapku, každá frekvence se na povrchu kapky trochu jinak odrazí a zlomí. Výsledkem je rozložení bílého světla na jeho jednotlivé barevné složky. Na jednom kraji duhy je červená barva s nejmenší frekvencí. Červená přechází v oranžovou, dále ve žlutou, zelenou, modrou a na druhém kraji duhy je s největší frekvencí fialová barva. (Takové pořadí barev odpovídá jejich vzestupnému řazení podle frekvence, sestupnému podle vlnové délky.)

Závislost indexu lomu na frekvenci vlny nazýváme **disperzí**. Ve většině případů platí, že s rostoucí frekvencí roste index lomu prostředí a tedy klesá fázová rychlost vlny, tzv. **normální disperze**. Při normální disperzi hmotné prostředí více ovlivňuje vlny o vyšších frekvencích. Na obrázku 20 vidíme³, že po průchodu světla skleněným hranolem se od původního směru nejvíce odchýlil paprsek modré barvy, naopak cesta červeného se od původní změnila nejméně. Modrá barva s vyšší frekvencí byla sklem více ovlivněna než červená.



obr. 20: Normální disperze

Poznámka: V plazmatu se setkáme také s **anomální disperzí**, kdy vlny o vyšších frekvencích procházejí prostředím snadněji (rychleji) než vlny s nižšími frekvencemi.

Dosadíme-li do rovnice (23) $n = \frac{c}{v_f}$ za fázovou rychlost v_f vztah (13) $v_f = \frac{\omega}{k}$, dostaneme závislost indexu lomu n na úhlové frekvenci ω , kterou nazýváme **disperzní relace**

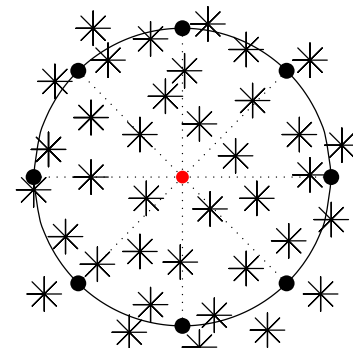
$$n = \frac{c}{\frac{\omega}{k}} \Rightarrow n = \frac{ck}{\omega}, \quad (26)$$

kde k je vlnové číslo. Disperzní relací je také například závislost úhlové frekvence na vlnovém čísle $\omega = \frac{ck}{n}$ (nebo jiný tvar rovnice (26)).

4.4 Izotropní a anizotropní prostředí

Představte si, že stojíte na pařezu v lese s píšťalkou v ruce. Osm vašich kamarádů z atletického kroužku stojí kolem vás. Písknete a všichni kamarádi se rozutečou po zalesněné rovině každý na jinou stranu. Situaci vidíme shora na obrázku 21, kamarádi jsou černé tečky, vy jste červená a hvězdičky představují jehličnany.

Po deseti sekundách písknete podruhé a všichni se zastaví. Les je všude stejně hustý, stromy jsou v lese rozmístěny náhodně, a tak každý z osmi kamarádů se musel cestou vyhnout přibližně stejnému počtu stromů – všichni byli prostředím stejně bržděni. Jestliže všichni kamarádi běhají stejně rychle, pak vytvoří kružnici, v jejímž středu jste vy a pařez.



obr. 21: Kamarádi v lese

Les je dvourozměrné prostředí izotropní vůči běhání, ať běžíte jakýmkoli směrem, za daný čas uběhnete po každé stejnou vzdálenost. (Dvourozměrné proto, že běháte pouze po zemi – v jedné rovině.)

³Obr. 20 je převzatý z [9]

Anizotropním příkladem k izotropnímu lesu je trochu odrostlá smrková školka, kde jsou stromky vysázeny hustě v řadách. Kamarády jste přesvědčili, aby se pokusu zúčastnili ještě jednou – tentokrát ve školce. Stojíte v jedné z uliček. Písknete poprvé a kamarádi se rozutečou, po chvíli písknete podruhé a všichni se zastaví (obr. 22a).

Nejlépe se poběží Silvii, která běží na sever, a také Julii běžící na jih. Cestou se nemusí vyhýbat žádným smrčkům, a tak se od vás dostanou nejdál. Slávek Veselý, Jarda Vomáčka, Jindra Zindulka a Standa Zelenda, kteří běží v pořadí na severovýchod, jihovýchod, jihozápad a severozápad, se musí prodírat několika řadami stromků. Okolní prostředí je brzdí – neuběhnou tak velkou vzdálenost jako Silvie s Julií. Nejobtížněji se poběží Vendule na východ a Zdeňkovi na západ. Cestou musí překonat nejvíce řad smrčků. Z pohledu shora kamarádi vytvoří křivku podobnou elipse. Školka je dvou-

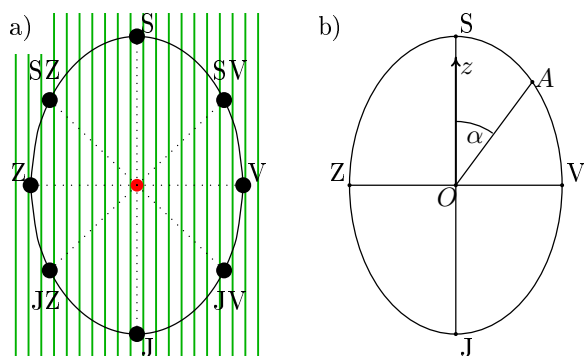
rozměrné anizotropní prostředí vůči běhání - vaše rychlost záleží na směru, kterým se vydáte.

Opticky izotropní prostředí je takové, ve kterém se elektromagnetická vlna o dané vlnové délce šíří všemi směry stejně rychle (šíření je ve všech směrech stejně ovlivňováno). Izotropní prostředí má tedy pro každou elektromagnetickou vlnu jedinou hodnotu indexu lomu. Vlnoplochy jsou kulové plochy se středem ve zdroji vlnění.

V **opticky anizotropním** prostředí rychlost vlny závisí na směru šíření, a tak každému směru odpovídá nějaká hodnota indexu lomu.

Závislost velikosti fázové rychlosti na směru šíření elektromagnetické vlny v daném dvourozměrném anizotropním prostředí můžeme zobrazit grafem na obrázku 22b. Směr šíření je charakterizován orientovaným úhlem, o který se směr fázové rychlosti vlny odchyluje od předem zvolené poloosy z .

Šíří-li se vlna pod úhlem α , vzdálenost bodu A na elipse od středu elipsy O odpovídá velikosti fázové rychlosti pro daný směr. Z obrázku 22b vidíme, že nejrychleji se vlna šíří přímo nahoru ($\alpha = 0$) a přímo dolů ($\alpha = 180^\circ$). Těmto dvěma směrům připadá tudíž nejmenší hodnota indexu lomu n . Nejpomaleji se budou šířit elektromagnetické vlny kolmo na poloosu z , úhly 90° a 270° . Zde jsou maximální hodnoty indexu lomu.

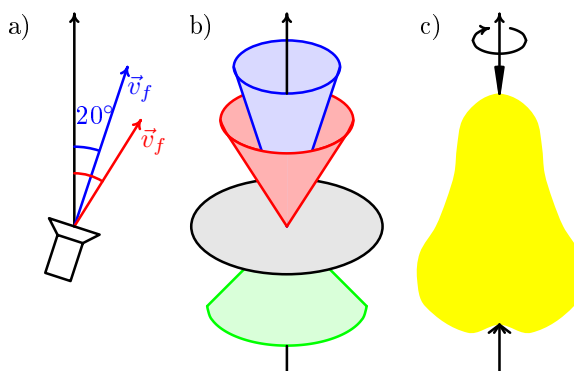


obr. 22: Kamarádi v lesní školce; diagram velikosti fázové rychlosti v závislosti na směru

4.5 Válcově symetrické prostředí

Sedíte v neznámé místnosti na točící židli s baterkou v ruce. Svítíte šikmo, třeba pod úhlem 20° od svislého směru (na obrázku 23a modrý případ). Vlnám, které vysíláte patří jistá hodnota fázové rychlosti. Když se na židli pootočíte, budete svítit jinam, stále však pod stejným úhlem vzhledem k svislému směru. Velikost fázové rychlosti vln se oproti předchozímu případu nezmění. Na míře pootočení nazáleží, a tak všechny stejně dlouhé fázové rychlosti vytvoří modrý kužel, obr. 23b.

Nyní baterku skloníte, změníte úhel třeba na 30° (červený případ). Světelným vlnám teď bude připadat jiná velikost fázové rychlosti. Otočení na židli opět nebude hrát roli. Hmotné prostředí, které se v místnosti nachází, je **válcově symetrické** se svislou osou symetrie. Velikost fázové rychlosti vlny závisí pouze na úhlu, o který se odchylujete od svislé osy, točení na židli vliv nemá. Na obrázku 23b jsou ještě zakresleny černé směry kolmé na osu symetrie a zelené směry odpovídající úhlu 135° .



obr. 23: Válcově symetrické prostředí

Válcově symetrická je například hruška, kterou když roztočíte kolem osy procházející stopkou a bubákem (obr. 23c), tak vypadá stále stejně.

Omezíme-li se ve válcově symetrickém prostředí na rovinu kolmou na osu symetrie, graf popisující velikosti rychlostí vytvoří kružnici – černá kružnice pro šedé směry. Vždy když vodorovně rozříznete hrušku skrz jádřinec, řezem bude kružnice.

Zvolíme-li si ve válcově symetrickém prostředí jakoukoli rovinu obsahující osu symetrie, její graf bude pokaždé stejný. Ať hrušku rozříznete kteroukoli rovinou obsahující stopku a bubák, získáme vždy stejný tvar.

Pro popis všech směrů v trojrozměrném anizotropním válcově symetrickém prostředí nám stačí znát rozložení rychlostí v libovolné rovině obsahující osu symetrie. (Z libovolného řezu hrušky procházející stopkou a bubákem si vždy představíme celou hrušku.)

Anizotropní prostředí, které budeme dále uvažovat, budou válcově symetrická.

4.6 Grupová rychlost

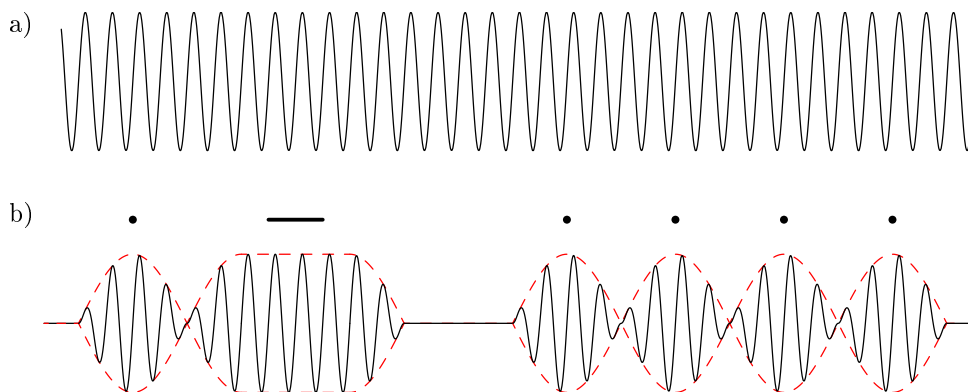
V noci svítíte baterkou do okna protějšího domu, které patří vašemu kamarádovi ze základní školy. Když budete jen svítit, nic tím nesdělíte (snad jen to, že vám

v pokoji něco svítí). Chcete-li poslat nějakou zprávu, musíte blikat; třeba morseovku.

Dlouhá, stále stejná vlna z obrázku 24a v sobě nenese žádnou informaci. Pokud chceme poslat nějaká data, musíme vlnu **modulovat** – měnit její amplitudu (a v důsledku toho i frekvenci). Informace je pak ukryta v **obálce** vlny. Na obrázku 24b jsou první dvě písmena ze slova AHOJ: A tečka, čárka, H čtyři tečky. Obálka je červeně.

Kdybychom svítili žlutým světlem a signál morseovkové čárky by trval půl sekundy, vešlo by se do balíku $3 \cdot 10^{14}$ vlnových délek. V obrázku 24b je v čárkovém balíku nakresleno jen osm vlnek – obrázek je pouze schematický. Číslo $3 \cdot 10^{14}$ získáme snadno: vzdálenost, kterou světlo urazí za půl sekundy, $s = c \cdot t \Rightarrow s = 3 \cdot 10^8 \cdot 0,5 \text{ m} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m}$, vydělíme vlnovou délkou žlutého světla $\frac{s}{\lambda} = \frac{1,5 \cdot 10^8}{500 \cdot 10^{-9}} = 3 \cdot 10^{14}$.

Poznámka: V praxi se také používá frekvenční modulace, kdy amplituda zůstává konstantní a mění se pouze frekvence vlny. Zkratky u rádií odpovídají amplitudové nebo frekvenční modulaci – AM, FM.



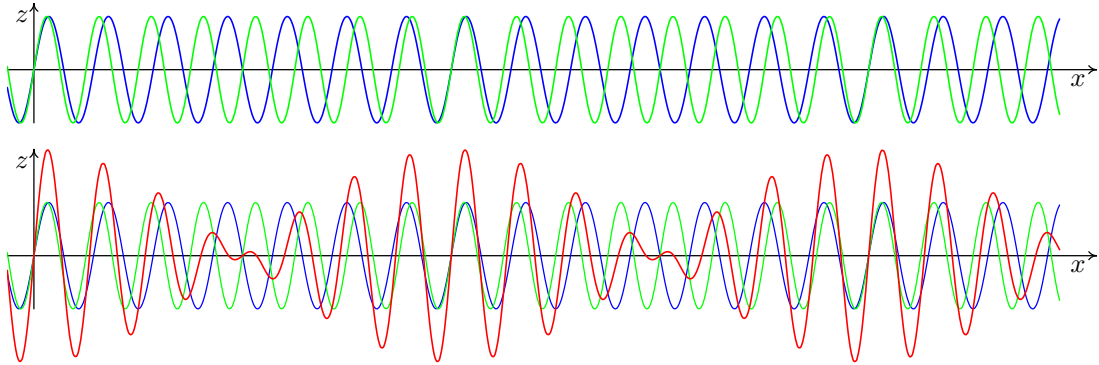
obr. 24: Elektromagnetická vlna bez informace a vlna se vzkazem v morseovce

Rychlost šíření informace (rychlost obálky) má obecně jinou velikost než je velikost fázové rychlosti vlny. Vztah pro „obálkovou“ rychlost si odvodíme. Budeme uvažovat nejjednodušší případ, kdy se dvě různé elektromagnetické vlny o úhlových frekvencích ω_1 a ω_2 šíří stejným směrem v izotropním prostředí. Vlny složíme a z průběhu elektrické intenzity E výsledné vlny budeme schopni určit velikost rychlosti obálky. Odvození průběhu E je sice zdouhavé, ale není příliš obtížné. Budeme upravovat výrazy a použijeme součtové vzorce pro sinus a kosinus, které jsou v tabulkách.

Odvození elektrické intenzity složené vlny

Uvažujme dvě elektromagnetické vlny označené písmeny Z a M , které mají různé úhlové frekvence, různá vlnová čísla a shodné amplitudy. Obě se šíří podél osy x

a jejich elektrické složky E_Z a E_M kmitají do směru osy z , na obrázku 25 zeleně a modře. Díky tomu můžeme elektrickou intenzitu vlny, která vznikne složením zelené a modré vlny, vyjádřit jako součet elektrických intenzit vln původních; $E = E_Z + E_M$. Z výsledné červeně označené intenzity E určíme velikost rychlosti, kterou se šíří informace ukrytá ve vlně. Pro větší přehlednost budeme nejdříve upravovat jednotlivé složky E_Z a E_M zvlášť.



obr. 25: Složením modré a zelené vlny vznikne červená

Elektrické intenzity vln Z a M zapíšeme ve tvaru

$$E_Z = E_A \sin(\omega_Z t - k_Z x), \quad (27)$$

$$E_M = E_A \sin(\omega_M t - k_M x), \quad (28)$$

kde ω_Z a ω_M jsou úhlové frekvence, k_Z a k_M vlnová čísla, E_A je amplituda (stejná pro obě vlny) a t je čas.

Předpokládejme, že naše vlny mají blízké úhlové frekvence lišící se jen o málo. Potom je můžeme vyjádřit pomocí jejich průměrné úhlové frekvence ω a malého „kousíčku“ $\Delta\omega$, o který se každá od průměrné hodnoty liší: $\omega_Z = \omega + \Delta\omega$ a $\omega_M = \omega - \Delta\omega$. Podobně zapíšeme pomocí průměrné hodnoty k a kousíčku Δk i jejich vlnová čísla k_Z a k_M : $k_Z = k + \Delta k$ a $k_M = k - \Delta k$. Rovnice (27) a (28) přejdou na tvary

$$E_Z = E_A \sin[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x],$$

$$E_M = E_A \sin[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x].$$

Kulaté závorky roznásobíme a členy přeskupíme

$$E_Z = E_A \sin[\omega t - kx + \Delta\omega t - \Delta kx],$$

$$E_M = E_A \sin[\omega t - kx - \Delta\omega t + \Delta kx].$$

Pro lepší orientaci si vytvoříme závorky nové

$$E_Z = E_A \sin[(\omega t - kx) + (\Delta\omega t - \Delta kx)],$$

$$E_M = E_A \sin[(\omega t - kx) - (\Delta\omega t - \Delta kx)].$$

První kulatou závorku v obou rovnicích si označíme a a druhou b , vztahy se zjednoduší

$$E_Z = E_A \sin[a + b],$$

$$E_M = E_A \sin[a - b].$$

Uvažujeme dvě vlny, jejichž elektrické intenzity kmitají ve směru osy z . Elektrická intenzita vlny, která vznikne složením vln Z a M , je dána součtem jednotlivých elektrických intenzit; $E = E_Z + E_M$. Obě rovnice sečteme, vytkneme společnou amplitudu a máme tvar

$$E = E_A \{\sin[a + b] + \sin[a - b]\}.$$

Nyní použijeme součtové vzorce⁴

$$\sin[a + b] = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin[a - b] = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

a dostáváme

$$E = E_A \{\sin a \cos b + \cos a \sin b + \sin a \cos b - \cos a \sin b\}.$$

Třetí člen přičteme k prvnímu a čtvrtý odečteme od druhého. Získáme tvar

$$E = E_A \{2 \sin a \cos b\} = 2E_A \sin a \cos b,$$

který už lépe neupravíme. Nezbyvá než se vrátit k původním fyzikálním veličinám ($a = \omega t - kx$, $b = \Delta\omega t - \Delta kx$)

$$E = 2E_A \sin(\omega t - kx) \cos(\Delta\omega t - \Delta kx). \quad (29)$$

Rovnice (29) popisuje průběh elektrické složky vlny, která vznikne složením dvou elektromagnetických vln šířících se podél osy x . Vlny mají shodné amplitudy E_A , blízké úhlové frekvence ω_Z a ω_M a blízká vlnová čísla k_Z a k_M . ω a k značí průměrné hodnoty úhlových frekvencí ω_Z a ω_M a vlnových čísel k_Z a k_M ; $\Delta\omega$ je hodnota, o kterou se původní úhlové frekvence liší od průměrné ($\Delta\omega = \omega_Z - \omega = \omega - \omega_M$), podobně pro Δk ($\Delta k = k_Z - k = k - k_M$).

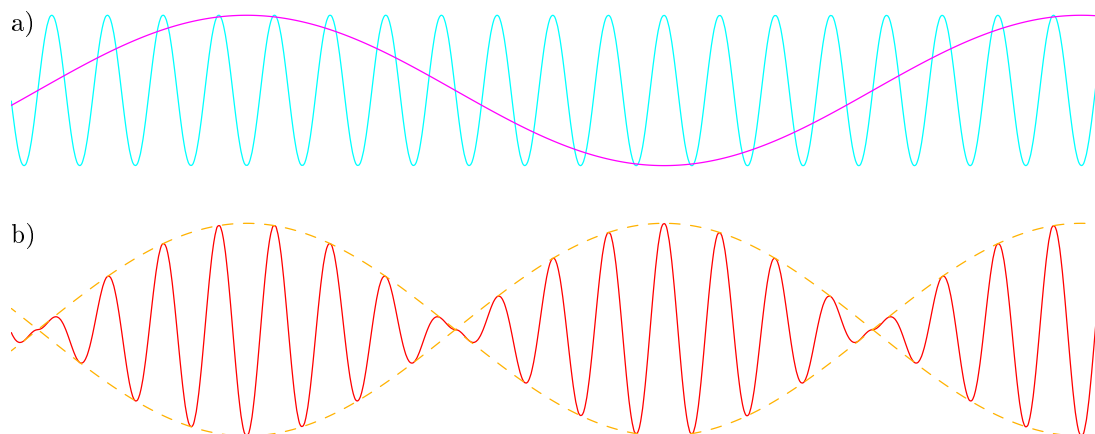
⁴Vzorce nalezneme v tabulkách a platí pro jakékoliv hodnoty a a b .

Rozbor složené vlny

Rovnice (29) popisuje elektrickou složku jisté elektromagnetické vlny. Ihned můžeme říci, že její amplituda je rovna $2E_A$. Bude-li sinus i kosinus roven jedné (popř. minus jedné), pravá strana nabude maximální hodnoty $2E_A$. Bude-li sinus roven jedné a kosinus minus jedné nebo naopak, pravá strana bude rovna $-2E_A$. V jakémkoli jiném případě bude součin goniometrických funkcí v intervalu $(-1, 1)$, a tedy hodnota pravé strany padne vždy do intervalu $\langle -2E_A, 2E_A \rangle$.

Část $\sin(\omega t - kx)$ popisuje elektrickou složku elektromagnetické vlny šířící se po směru osy x , jejíž úhlová frekvence je ω a vlnové číslo je k . Pomocí rovnice (13) také určíme velikost rychlosti, jakou se tato vlna šíří prostorem $\frac{\omega}{k}$.

Další část rovnice (29) $\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$ také popisuje elektrickou složku nějaké elektromagnetické vlny šířící se po směru osy x . Tato vlna má úhlovou frekvenci $\Delta\omega$ a vlnové číslo Δk . Velikost rychlosti jejího šíření je tedy $\frac{\Delta\omega}{\Delta k}$.



obr. 26: Přenásobením tyrkysové vlny růžovou vznikne červená (totožná s červenou z obr. 25b)

Na 26a jsou zakresleny obě vlny. Tyrkysová křivka popisuje první část $\sin(\omega t - kx)$ a růžová druhou $\cos(\Delta\omega t - \Delta kx)$. Připomeňme, že $\Delta k \ll k$, proto má růžová vlna mnohem větší vlnovou délku než tyrkysová (pro k platí vztah (14) $\lambda = \frac{2\pi}{k}$). Přenásobíme-li tyrkysovou křivku růžovou, vznikne červená křivka⁵ znázorněná na 26b. Jde o výslednou vlnu, která vznikla složením vln modré a zelené z obrázku 25 a která se šíří prostorem.

Elektromagnetické vlně popsané rovnicí (29) přísluší tudíž dvě rychlosti. Rychlost tyrkysové nosné vlny

$$v_f = \frac{\omega}{k}, \quad (30)$$

⁵Tyrkysová vlna je omezená růžovou – je-li „růžový“ kosinus v rovnici (29) roven nule, je celá pravá strana rovna nule, ať je „tyrkysový“ sinus jakýkoliv.

kteřá odpovídá velikosti fázové rychlosti vlny – rychlosti šíření fáze prostorem. A rychlost růžové obálky

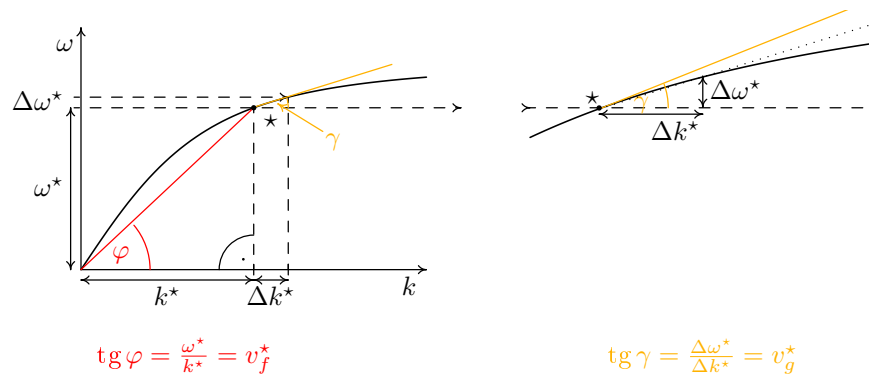
$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}, \quad (31)$$

kteřá odpovídá velikosti rychlosti šíření informace nesené vlnou. Rychlost v_g nazýváme **grupovou rychlostí**, jednotkou je $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Na závěr se vrátíme se k baterce a blikání. Když váš kamarád „čte“ vzkaz, pamatuje si, jak dlouho baterka svítí či nesvítí – vnímá tvar žluté čárkované obáلكové vlny z obrázku 26b.

4.7 Velikost fázové a grupové rychlosti

Možná vám připadá, že vztah pro velikost grupové rychlosti $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ je stejný jako vztah pro velikost fázové rychlosti $v_f = \frac{\omega}{k}$; rozdíl mezi nimi si ukážeme na grafu disperzní relace – závislosti úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k .



obr. 27: Velikost fázové a grupové rychlosti z disperzní relace ω na k

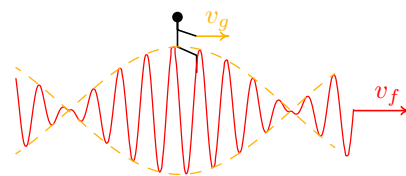
Graf 27a zobrazuje jistou disperzní relaci. Zvolme si konkrétní elektromagnetickou vlnu a označme si ji hvězdičkou \star . Naše vlna má úhlovou frekvenci ω^* a vlnové číslo k^* . Z pravoúhlého trojúhelníku na obrázku 27a určíme velikost fázové rychlosti hvězdičkové vlny. Je rovna tangenti úhlu, který svírá červená přímka procházející bodem \star a počátkem s vodorovnou osou; $v_f^* = \frac{\omega^*}{k^*} = \tan \varphi$ (φ jako fázová).

Velikost grupové rychlosti naší vlny z grafu disperzní relace také vyčteme. Potřebujeme najít $\Delta\omega$ a Δk , $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$. Při odvozování elektrické intenzity složené vlny jsme si Δk označili malinký „kousíček“ vlnového čísla u hodnoty k . Do grafu 27 zakreslíme Δk^* na vodorovnou osu, přesnou délku si zvolíme, třeba 1 cm. Na svislé ose najdeme příslušnou vzdálenost $\Delta\omega^*$.

Na vedlejším obrázku vidíme zvětšené okolí bodu \star s vyznačenými vzdálenostmi Δk^* a $\Delta\omega^*$. V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami Δk^* a $\Delta\omega^*$ a tečkovanou přeponou platí $\text{tg } \gamma = \frac{\Delta\omega^*}{\Delta k^*}$. Kdybychom zmenšovali Δk^* , zmenšovala by se i $\Delta\omega^*$ a tedy

i celý trojúhelníček s vrcholem \star . Jeho tečkováná přepona by se více a více přibližovala žluté tečně grafu v bodě \star a úhel γ by stále lépe odpovídal sklonu křivky v bodě \star (γ jako v_g).

Shrnuto: Je-li dán graf disperzní relace (závislost ω na k), jsme z něj schopni určit velikosti obou rychlostí libovolné elektromagnetické vlny. Velikosti fázové rychlosti v_f odpovídá úhel φ při počátku a velikosti grupové rychlosti v_g sklon grafu v daném bodě, úhel γ . Každý ze vztahů (30) $v_f = \frac{\omega}{k}$ a (31) $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ určuje něco jiného.



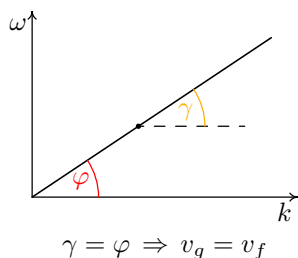
obr. 28: Pro představu v_f a v_g

Představte si, že „sedíte“ na obálce vlny, která se s vámi pohybuje doprava žlutou rychlostí. Červená vlna, která je obálkou omezená, se pohybuje rychleji než vy, $v_f > v_g$. Červené kopečky a údolí pod vámi ubíhají, jako by je někdo doprava tahal. V případě rovnosti v_f a v_g je červená křivka se žlutou svázaná a vy sedíte stále nad tím samým červeným kopečkem.

Nyní si ukážeme dvě disperzní relace a určíme si velikosti rychlostí v_f a v_g .

Příklad první

Na obrázku 29 vidíme lineární závislost úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k . Grupová rychlost má v každém bodě grafu stejnou velikost, protože všem bodům přímky odpovídá stejný sklon. Fázová rychlost je také všude stejná, neboť spojnice libovolného bodu grafu a počátku svírá s vodorovnou osou stále tentýž úhel φ . Dokonce platí, že úhel φ odpovídá sklonu přímky, a tedy platí $v_g = v_f$.



obr. 29: v_f a v_g v nedisperzním prostředí

Připomeneme si obecný vztah mezi ω a k $\omega = \frac{c}{n}k$. Jestliže je grafem přímka procházející počátkem, jde o přímou úměru a zlomek $\frac{c}{n}$ je konstantní. Rychlost světla je neměnná, a tak i n musí být stále stejné. V tomto případě index lomu n nezávisí na vlnové délce (na vlnovém čísle) elektromagnetické vlny – všechny vlny se prostředím šíří stejnou rychlostí, nedochází k disperzi. Obrázek 29 zobrazuje disperzní relaci prostředí, které není disperzní – mohli bychom hovořit o relaci „nedisperzní“.

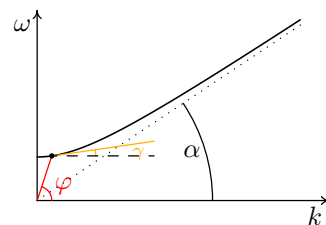
Tato nedisperzní relace odpovídá třeba vakuu, kde $n = 1$, $\omega = ck$ a $v_g = v_f = c$. V jiných nedisperzních prostředích by úhel φ byl menší než u vakua (přímka by tolik nestoupala). Obě rychlosti v_f a v_g by i zde měly shodné velikosti, ale byly by menší než c .

Příklad druhý

Graf na obrázku 30 znázorňuje disperzní relaci, se kterou se ještě setkáme. Pro malá vlnová čísla je úhel φ téměř $\frac{\pi}{2}$, potom $\tan \varphi$ a tedy i velikost fázové rychlosti nabývá libovolně vysokých hodnot (převyšujících c). Zvětšujeme-li k , úhel φ postupně klesá až k úhlu α (pro obrovská k se φ rovná α). Velikost fázové rychlosti v_f tedy s rostoucím k klesá, od libovolně vysokých hodnot k $\tan \alpha$.

Grupová rychlost je pro malá k blízká nule, protože křivka vede téměř vodorovně. Zvětšujeme-li vlnové číslo, křivka roste, je strmější a strmější. Pro obrovská k má největší sklon odpovídající úhlu α . Velikost grupové rychlosti v_g s rostoucím k roste, pohybuje se v intervalu $(0, \tan \alpha)$.

Z předpokladu teorie relativity plyne, že velikost grupové rychlosti (odpovídající šíření informace) nemůže přesáhnout velikost rychlosti světla c . Velikost fázové rychlosti hodnotou c omezená není, protože s ní není spojen přenos informace.



obr. 30: v_f a v_g v plazmatu

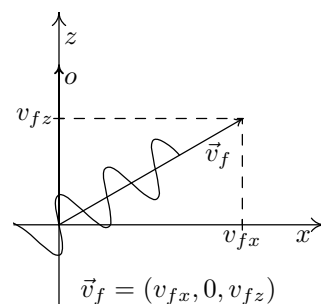
4.8 Vektor fázové rychlosti

Fyzikální veličina rychlost je vektorová veličina – má svoji **velikost**, ale i **směr**. Jdete-li rychlostí 5 km/h do kina je to jiné, než když jdete rychlostí 5 km/h k zubaři, pokud ovšem zubař neordinuje v kinosále.

Už jsme se setkali se třemi rychlostmi (úhlovou, fázovou a grupovou) a o vektorech ještě nebyla kloudná řeč. Pokud jde o úhlovou rychlost u rovnoměrného pohybu po kružnici z první části, není se čemu divit. Úhlová rychlost zde není vektorová veličina ale skalární, jde o úhel φ dělený časem t (vztah (4)). Fázová i grupová rychlost už vektorové veličiny jsou. Jejich velikosti jsme si podrobně popsali v předchozí kapitole, směry přišly na řadu nyní.

Uvažujeme-li rovinnou vlnu procházející izotropním prostředím (kde jsou všechny směry rovnocenné) je výhodné zvolit souřadné osy tak, aby se vlna šířila podél jedné z nich (my jsme ji značili x). Můžeme se pak omezit pouze na tento jeden směr a pro rychlost vystačíme s číslem, vektor není potřeba.

Popisujeme-li šíření vln v anizotropním prostředí, je vhodné souřadné osy svázat s prostředím a nikoli s vlnou. Mějme rovinnou vlnu šířící válcově symetrickým prostředím, obr. 31. Osu symetrie prostředí o ztotožníme s osou z . Válcově symetrické prostředí jinou význačnou osu nemá, zbylé osy už přizpůsobíme vlně. Osu x zvolíme tak, aby se vlna šířila pouze v rovině xz . Osa y pak



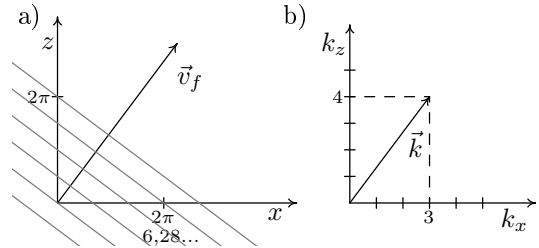
obr. 31: Vektor \vec{v}_f

na obrázku 29 vede kolmo do papíru (osy tvoří pravotočivou soustavu souřadnic, viz strana 12). Chceme-li nyní popsat fázovou rychlost vlny, která se šíří v rovině xz různoběžně s osami x i z , musíme použít vektor $\vec{v}_f = (v_{fx}, 0, v_{fz})$. V obecném případě pak $\vec{v}_f = (v_{fx}, v_{fy}, v_{fz})$.

4.9 Vlnový vektor

Informace o tom, že se vlna nešíří pouze podél osy x , musí být ukryta v rovnici vlny. Vlna z obrázku 31 se pohybuje v rovině xz a průběh velikosti jejího vektoru elektrické intenzity \vec{E} popisuje rovnice $|\vec{E}| = |\vec{E}_A| \sin(\omega t - (k_x x + k_z z))$. Oproti vlně šířící se podél osy x s rovnicí $E = E_A \sin(\omega t - kx)$, připadá naší vlně **vlnový vektor** $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$. Kdyby se vlna z obrázku 31 nešířila jen v rovině xz , rovnice vlny by ještě měla člen $k_y y$ a vlnový vektor by měl tvar $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Vedle fázové rychlosti \vec{v}_f musí být i \vec{k} vektorová veličina.

Hodnoty k_x, k_y a k_z si objasníme na obrázku 32. Na 32a je zakreslena rovinná vlna vlnoplochami a vektorem fázové rychlosti. Vidíme, že na osu x se do vzdálenosti 2π m (přibližně tedy do 6,28 m) vejdou tři vlnoplochy a tedy tři vlnové délky naší vlny, $k_x = 3 \text{ m}^{-1}$. Do stejné vzdálenosti na ose z se vejdou čtyři vlnoplochy, $k_z = 4 \text{ m}^{-1}$. Do směru osy y se vlna vůbec nešíří, a tak $k_y = 0 \text{ m}^{-1}$.



obr. 32: Vektory \vec{v}_f a \vec{k}

Obrázek 32b zobrazuje vlnový vektor $\vec{k} = (3, 0, 4)$. Z obrázků vidíme, že směr vlnového vektoru \vec{k} je stejný jako směr fázové rychlosti \vec{v}_f a také, že jsou oba vektory kolmé na vlnoplochy vlny. Velikost vektoru \vec{k} je rovna jeho délce, v našem případě pro $\vec{k} = (3, 0, 4)$ je $|\vec{k}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} \text{ m}^{-1} = \sqrt{9 + 16} \text{ m}^{-1} = 5 \text{ m}^{-1}$.

Je-li fázová rychlost elektromagnetické vlny dána vektorem $\vec{v}_f = (v_{fx}, v_{fy}, v_{fz})$, přísluší jí také vlnový vektor $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Oba vektory určují v prostoru stejný směr, který je kolmý k vlnoplochám vlny.

Vektorový tvar rovnice (30) $v_f = \frac{\omega}{k}$ zapíšeme pomocí velikostí vektorů \vec{v}_f a \vec{k}

$$|\vec{v}_f| = \frac{\omega}{|\vec{k}|}. \quad (32)$$

Pozor! Podobné vztahy pro jednotlivé složky vektorů \vec{v}_f a \vec{k} neplatí, neboli $v_{fx} \neq \frac{\omega}{k_x}$, $v_{fy} \neq \frac{\omega}{k_y}$ a $v_{fz} \neq \frac{\omega}{k_z}$. Odůvodnění je snadné, protože víme, že vektor fázové rychlosti \vec{v}_f směřuje stejně jako vlnový vektor \vec{k} . Je-li například x -ová složka vlnového vektoru $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ ze všech tří složek největší, musí být největší i x -ová

složka fázové rychlosti $\vec{v}_f = (v_{fx}, v_{fy}, v_{fz})$. Kdybychom užili (výše zmíněné) špatné rovnice, díky podílu by největší složka vlnového vektoru odpovídala nejmenší složce fázové rychlosti a naopak (ω je stále stejná).

Správné vztahy pro jednotlivé složky \vec{v}_f si uvádíme pouze pro úplnost

$$v_{fx} = \frac{\omega k_x}{|k|^2}, \quad v_{fy} = \frac{\omega k_y}{|k|^2}, \quad v_{fz} = \frac{\omega k_z}{|k|^2}. \quad (33)$$

4.10 Definice vektoru grupové rychlosti

V kapitole 4.6 jsme si odvodili vztah pro velikost grupové rychlosti $v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$ vlny, která se šíří izotropním prostředím podél osy x s vlnovým číslem k a úhlovou frekvencí ω .

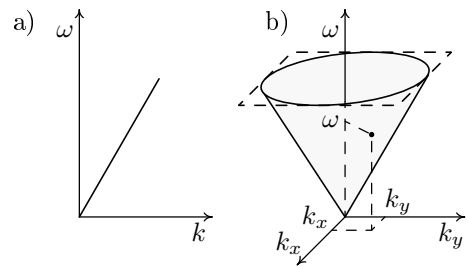
Je-li vlna dána vlnovým vektorem $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, její grupová rychlost bude také vektorová veličina $\vec{v}_g = (v_{gx}, v_{gy}, v_{gz})$, pro kterou platí následující vztahy

$$v_{gx} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_x}, \quad v_{gy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_y}, \quad v_{gz} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_z}. \quad (34)$$

Abychom si uměli vektor grupové rychlosti představit, budeme opět potřebovat grafy disperzních relací. Tentokrát ovšem bude třeba závislost úhlové frekvence ω na vlnovém vektoru \vec{k} .

4.11 Grupová rychlost v nedisperzním izotropním prostředí

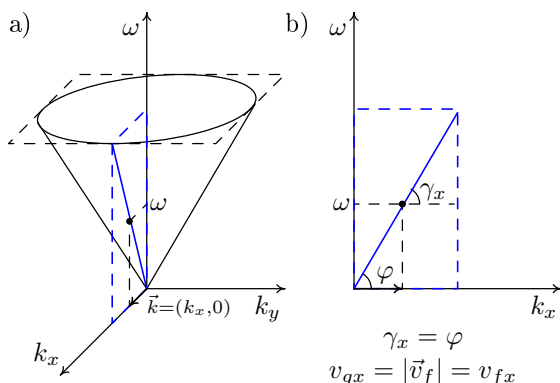
V jednorozměrném prostředí se vlny mohou šířit pouze podél jedné přímky, označme ji x . Uvažujeme-li prostředí nedisperzní, všem vlnám (frekvencím) připadá jediná hodnota fázové rychlosti v_f . Se závislostí ω na k tohoto prostředí jsme se setkali v prvním příkladě v kapitole 4.7. Jde o přímku procházející počátkem, obr. 33a.



Náš prostor nyní rozšíříme na izotropní rovinu xy – všechny směry z této roviny bude popisovat tatáž přímka z obrázku 33a. Disperzní relace pro jednotlivé směry dohromady vytvoří kuželovou plochu nad rovinou xy s vrcholem v počátku, obr. 33b. Tato plocha je disperzní relací (grafem závislosti úhlové frekvence ω na vlnovém vektoru \vec{k}) roviny xy . Jde o funkci dvou proměnných, tzn. musíte zadat dvě vstupní hodnoty k_x a k_y , abyste získali výsledek ω .

obr. 33: Disperzní relace nedisperzní izotropní roviny xy

Vrátíme se k původní vlně, která se šíří pouze ve směru osy x , ale stále budeme uvažovat celou rovinu xy (vektory budou mít dvě složky; x -ovou a y -ovou). Vlnový vektor \vec{k} směřuje podél x , $\vec{k} = (k_x, 0)$, $k_x > 0$. Jeho velikost je $|\vec{k}| = \sqrt{k_x^2 + 0^2} = k_x$.



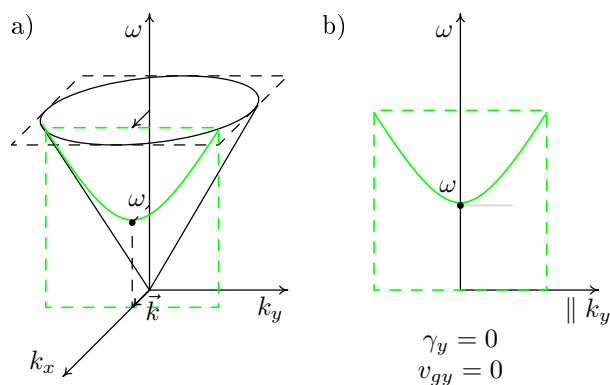
obr. 34: x -ová složka grupové rychlosti

Z grafu 34a odečteme úhlovou frekvenci naší vlny ω a dle rovnice (32) $|\vec{v}_f| = \frac{\omega}{|\vec{k}|}$ určíme velikost vektoru fázové rychlosti. Fázová rychlost má stejný směr jako vlnový vektor, můžeme ji tedy zapsat ve tvaru $\vec{v}_f = (v_{fx}, 0) = (|\vec{v}_f|, 0)$.

Složky vektoru grupové rychlosti \vec{v}_g jsou dány rovnicemi (34) $v_{gx} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_x}$ a $v_{gy} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_y}$. Zlomek $\frac{\Delta\omega}{\Delta k_x}$ udává sklon funkce ω v závislosti na k_x v bodě označeném puntíkem. Kužel řízeme modrou rovinou, která prochází puntíkem a je kolmá na osu y . Kolmost je nutná proto, aby k_y

bylo v celé modré rovině konstantní (v našem případě $k_y = 0$) a my měli závislost pouze na k_x . V modré rovině vidíme potřebnou závislost úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k_x . Je to přímka z 33a, ze které jsme vytvořili celý kužel. Složka vektoru grupové rychlosti v_{gx} je dána sklonem modré polopřímky v puntíkovém bodě. Ten je ovšem stejný jako úhel φ , který udává x -ovou složku vektoru fázové rychlosti. Tedy platí $v_{gx} = v_{fx} = |\vec{v}_f|$.

Zbývá určit hodnotu v_{gy} , neboli sklon grafu závislosti úhlové frekvence ω na vlnovém čísle k_y . Teď kužel řízeme zelenou rovinou, která prochází naším puntíkovým bodem a je kolmá na osu x . Získáme tak graf závislosti úhlové frekvence ω pouze na vlnovém čísle k_y ; k_x je zde všude stejné. Zelenou křivku (část hyperboly) vidíme na obrázku 35b. Puntík je v jejím minimu (v dolíku). Sklon křivky v minimu je nulový (tečna vede vodorovně) a tedy $v_{gy} = 0 = v_{fy}$.



obr. 35: y -ová složka grupové rychlosti

Došli jsme k závěru, že vektor grupové rychlosti \vec{v}_g libovolné vlny v nedisperzním izotropním prostředí je shodný s jejím vektorem fázové rychlosti \vec{v}_f , $v_{gx} = v_{fx}$ a $v_{gy} = v_{fy}$, tudíž $\vec{v}_g = \vec{v}_f$. Velikost obou vektorů je pak dána jedinou hodnotou indexu lomu n celého prostředí $|\vec{v}_g| = |\vec{v}_f| = \frac{c}{n}$ (rovnice (23)).

4.12 Směr vektoru grupové rychlosti

Vztahy pro výpočet jednotlivých složek vektoru grupové rychlosti jsme si uvedli v kapitole 4.10. Počítat ani odvozovat pomocí nich už nebudeme. Dále budeme potřebovat pouze směr vektoru \vec{v}_g , který udává, kudy se informace nesená vlnou šíří. Bez odvozování si teď ukážeme, jak směr \vec{v}_g určit.

Vyjdeme z disperzní relace dvourozměrného prostředí, roviny xy , kde každé vlně s vlnovým vektorem $\vec{k} = (k_x, k_y)$ je přiřazena její úhlová frekvence ω (s tímto typem grafu jsme se setkali v předchozí kapitole. Graf funkce vytváří plochu nad rovinou xy . Na obrázku 36a disperzní relaci tvoří „zboku sešlápnutá miska“.

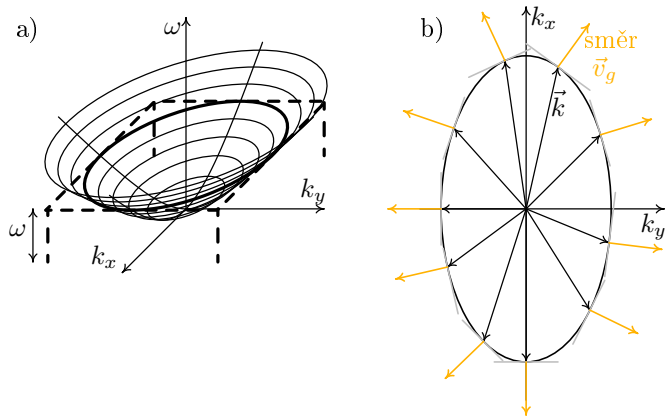
Omezíme se pouze na vlny o jediné úhlové frekvenci ω – plochu řízeme černou rovinou rovnoběžnou s xy ve výšce námi zvolené ω , řez je na obr. 36b. Černá křivka odpovídá koncovým bodům vlnových vektorů \vec{k} patřící vlnám o jediné ω .

Směr grupové rychlosti vlny je dán kolmicí k tečně grafu. Vše vidíme na obrázku 36b. Zvolíme si \vec{k} , šedě je vyznačena tečna grafu a žlutě její kolmice. Vektor \vec{v}_g vlny s vlnovým vektorem \vec{k} směřuje jako žlutá šipka. Pozor, jeho velikost šipka už neurčuje, získali jsme pouze směr.

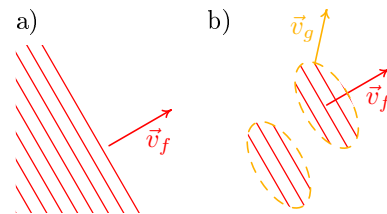
Na obrázku 36b je zobrazeno několik dalších vlnových vektorů se svými směry \vec{v}_g . Jelikož vektor fázové rychlosti vlny směřuje vždy jako \vec{k} (kapitola 4.9), směry rychlostí \vec{v}_f a \vec{v}_g připadající jedné vlně se mohou lišit. V našem případě platí $\vec{v}_g \parallel \vec{v}_f$ jen, když \vec{v}_f (resp. \vec{k}) míří podél x nebo y . V ostatních případech každá z rychlostí \vec{v}_f a \vec{v}_g směřuje jinam.

Na obrázku 37a je zobrazena vlna pomocí vlnoploch. Vlnoplochy se prostorem pohybují rychlostí popsanou červeným vektorem⁶, který odpovídá fázové rychlosti vlny. Pokud vlnou pošleme informaci, vytvoříme jakési balíčky (kapitola 4.6). Tyto balíčky (37b žlutě) se mohou pohybovat jiným směrem, než se uvnitř nich pohybují vlnoplochy.

⁶Směřujícím vždy kolmo na vlnoplochy.



obr. 36: Směry grupové rychlosti



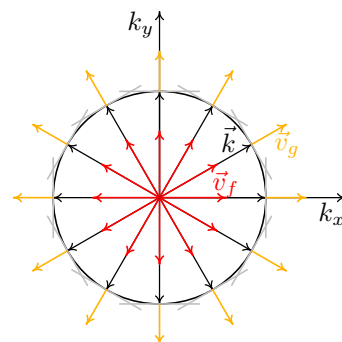
obr. 37: Odlíšné směry vektorů \vec{v}_g a \vec{v}_f

Směry \vec{v}_g a \vec{v}_f v izotropním prostředí

V izotropním prostředí platí, že velikost fázové rychlosti vlny nezávisí na jejím směru. Když jsou vektory \vec{v}_f pro jednu úhlovou frekvenci ω do všech směrů stejně dlouhé, pak i všechny vlnové vektory mají stejnou velikost, rovnice (32) $|\vec{k}| = \frac{\omega}{|\vec{v}_f|}$. Disperzní relací pro konstantní ω (analogickou k černému řezu v předchozí kapitole) je tedy vždy kružnice s poloměrem $|\vec{k}|$. Kdekoli si ke kružnici vytvoříme tečnu a k ní kolmici, vždy bude rovnoběžná s příslušným vlnovým vektorem \vec{k} a tedy i s vektorem fázové rychlosti \vec{v}_f , obr. 38.

V izotropním prostředí je vektor grupové rychlosti \vec{v}_g vždy rovnoběžný s vektorem fázové rychlosti \vec{v}_f .

Celá disperzní relace izotropní roviny xy musí být plocha, která má všechny vodorovné řezy kružnice (kužel, nesešlápnutá miska, otočený zvonek bez srdce). Takové plochy vzniknou otáčením nějaké křivky okolo svislé osy z . Původní křivka popisuje jeden směr z roviny xy , ale díky izotropii odpovídá všem směrům z xy . V kapitole 4.11 jsme z jedné polopřímky vytvořili celý kužel.



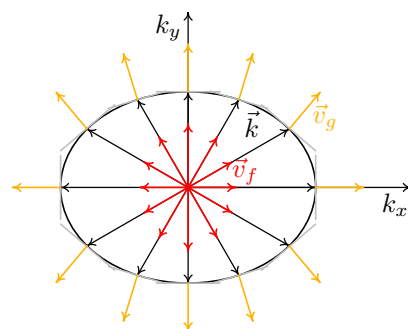
obr. 38: Směry \vec{v}_g v izotropním prostředí

Směry \vec{v}_g a \vec{v}_f v anizotropním prostředí

V anizotropním prostředí velikost fázové rychlosti elektromagnetické vlny závisí na jejím směru. Když jsou vektory \vec{v}_f patřící vlnám s jedinou ω různě dlouhé, pak jsou různě dlouhé i jejich vlnové vektory \vec{k} dané rovnicí (32) $|\vec{k}| = \frac{\omega}{|\vec{v}_f|}$.

Jedna z možných disperzních relací pro neměnnou ω je na obrázku 39. Vytvoříme-li ke křivce šedé tečny a k nim žluté kolmice, je jasně vidět, že existují směry, kde vektory rychlostí \vec{v}_f a \vec{v}_g míří odlišně.

V anizotropním prostředí vektor grupové rychlosti \vec{v}_g obecně není rovnoběžný s vektorem fázové rychlosti \vec{v}_f . Informace nesená vlnou se pak šíří jiným směrem v prostoru, než jakým se pohybují vlnoplochy.



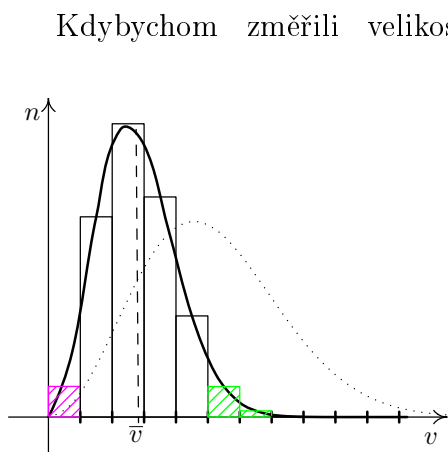
obr. 39: Směry \vec{v}_g v anizotropním prostředí

5 Plazma

K definování pojmu plazma budeme potřebovat několik kapitol. Začneme u obyčejného plynu v krabici.

5.1 Rozdělení rychlostí

Mějme krabici o objemu 1 m^3 a v ní plyn o pokojové teplotě. Plyn je tvořen jedním druhem neutrálních částic (atomů nebo molekul). Všechny částice plynu se **chaoticky pohybují** a náhodně do sebe **narážejí**. Jelikož jsou částice neutrální, nepůsobí mezi nimi žádná elektromagnetická síla. Vzájemné gravitační působení mezi částicemi je tak nepatrné, že jej můžeme zanedbat, a tak po většinu doby nepůsobí na částice žádná síla. Každá částice se pohybuje **rovnoměrně přímočaře** do doby, než se srazí s nějakou jinou částicí (popř. stěnou krabice). Po srážce se opět pohybuje rovnoměrně přímočaře.



obr. 40: Rozdělení rychlostí molekul

Kdybychom změřili velikosti rychlostí všech částic plynu, hodnoty by odpovídaly grafu na obrázku 40 – vodorovná osa je rozdělena na malé intervaly velikostí rychlosti, na svislou osu nanášíme počet částic. Ke každému malému intervalu rychlosti nalezneme počet částic, jejichž velikost rychlosti do daného intervalu spadá. Z grafu je patrné, že v plynu je malé množství velmi pomalých částic (růžově šrafováno) i několik velmi rychlých (zeleně šrafováno). Většina částic se ale nachází blízko průměrné rychlosti \bar{v} (\bar{v} odpovídá aritmetickému průměru rychlostí všech částic).

Jestliže plyn v krabici ohřejeme, částice se budou pohybovat **rychleji**. Křivka pro rozdělení rychlostí se více natáhne a zploští (na grafu tečkovaně).

Poznámka: Plocha pod křivkou grafu na obrázku 40 odpovídá celkovému počtu částic v krabici, neboť jednotlivé sloupečky odpovídají počtu částic s rychlostí z daného intervalu. Plocha pod grafem odpovídá součtu všech sloupečků a tedy počtu všech částic. Když se křivka natáhne (protože se zvětší průměrná rychlost), musí se také zploštit, aby byla celková plocha pod křivkou zachovaná; v krabici je stále stejně částic.

5.2 Vnitřní energie plynu, střední kvadratická rychlost

Známe-li velikosti rychlostí všech částic, můžeme určit **vnitřní energii** plynu U . Ta je dána součtem kinetických energií všech částic plynu. Kinetickou energii jedné částice vyjadřuje vztah

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad (35)$$

kde v je velikost rychlosti konkrétní částice a m její hmotnost.

Vnitřní energie plynu je také dána jeho teplotou

$$U = \frac{3}{2}NkT. \quad (36)$$

T představuje termodynamickou teplotu v kelvinech, k je Boltzmannova konstanta ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$) a N počet všech částic plynu (počet částic v 1 m^3). Z rovnosti (36) vidíme, že na jednu částici připadá energie $U_1 = \frac{3}{2}kT$. Tato energie odpovídá kinetické energii jakési „typické částice“. Rychlost v_s této „typické částice“ určíme snadno

$$\frac{1}{2}mv_s^2 = \frac{3}{2}kT \quad \implies \quad v_s = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (37)$$

Rychlost v_s se nazývá **střední kvadratická rychlost**. Každé termodynamické teplotě plynu jednoznačně odpovídá jiná hodnota střední kvadratické rychlosti (roste-li T , roste v_s). Pro libovolný plyn platí, že hodnota průměrné velikosti rychlosti \bar{v} je vždy menší než v_s .

Mějme dvě krabice se stejným počtem stejných částic. Velikosti rychlostí částic z první krabice odpovídají grafu z předchozí kapitoly. V druhé krabici se všechny částice pohybují stejně rychle s rychlostí v , která je rovna v_s částic z první krabice. Celkové energie obou krabic jsou si v takovém případě rovny.

Každé částici s velikostí rychlosti v můžeme přiřadit teplotu T . Ta odpovídá teplotě plynu, jehož střední kvadratická rychlost v_s je rovna právě rychlosti vybrané částice v . Příslušný vztah získáme jako vztah pro v_s – porovnáním kinetické energie jedné částice a vnitřní energie připadající na „typickou částici“.

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT \quad \implies \quad T = \frac{mv^2}{3k}. \quad (38)$$

O zářivce

Elektrony uvnitř zářivky se pohybují tak rychle, že jim dle vztahu (38) odpovídá teplota kolem $20\,000 \text{ K}$. Uvnitř zářivkové trubice je ale velmi málo částic – v trubici je podtlak. A tak celková energie, kterou částice při svých nárazech na stěnu trubice předají, zdaleka nestačí na zahřátí na vysokou teplotu.

Aby nám něco připadalo horké, je potřeba nejen velká rychlost částic, ale také jejich dostatečné množství. (Tři velmi rychlé molekuly vody vás nepopálí.)

5.3 Ionizovaný plyn

Je čas podívat se na srážky v plynu zblízka. Předpokládejme srážku dvou neutrálních atomů. Jestliže jsou oba pomalé, jejich srážka vypadá jako srážka dvou kulečnickových koulí, tzv. **pružná srážka**. Při pružné srážce se můžou změnit směry i velikosti rychlostí obou atomů, ale součet jejich kinetických energií před srážkou a po srážce se zachovává.

Je-li rychlost jednoho atomu dostatečně velká, může se při srážce část jeho kinetické energie využít na **ionizaci** (vydloubnutí) valenčního elektronu z druhého atomu. V takovém případě bude součet kinetických energií atomů po srážce menší než před srážkou. Ze srážky vyletí zpomalený neutrální atom, volný elektron a kladně nabitý iont. Plyn s několika takovými částicemi je **částečně ionizovaný**.

Energii potřebnou k ionizaci atomu je také možné získat z fotonu. Srazí-li se atom s dostatečně energetickým fotonem, může foton pohltit a uvolnit valenční elektron.

Opačným jevem k ionizaci je **rekombinace**. Při rekombinaci je díra v kladně nabitě částici zaplněna volným elektronem a vzniká neutrální atom (popř. molekula).

Zapadne-li volný elektron do kationtu, uvolní se energie, která je rovna energii potřebné k ionizaci vzniklé neutrální částice. Kdyby se tato uvolněná energie využila na zvýšení kinetické energie vzniklé částice, pro srážku by neplatil zákon zachování hybnosti (neutrální částice by měla větší hybnost než je součet hybností kationtu a elektronu před srážkou). Aby pro rekombinaci platil zákon zachování energie a také zákon zachování hybnosti, je nutné se této rekombinační energie nějak „zbavit“. Existují různé způsoby. Účastní-li se srážky molekula, přebytečná energie se může využít na její disociaci (rozpad molekuly). Druhá možnost je, že se společně s elektronem a kationtem srážky účastní třetí částice, která přebytečnou energii využije ke zvětšení své kinetické energie. Taková rekombinace je pravým opakem ionizace, jak jsme si ji původně vysvětlili, kdy do srážky vstupovaly dvě částice a vystupovaly tři. Další variantou je opačný jev k ionizaci fotonem. Kladně nabitá částice se srazí s elektronem a přebytečná energie může být vyzářena ve formě fotonu.

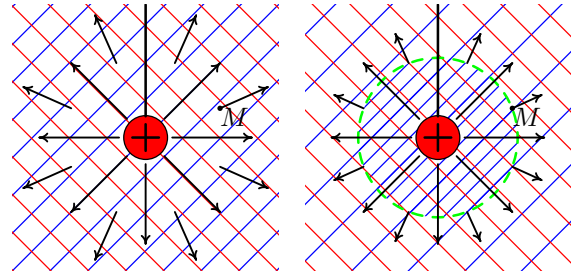
Čím je teplota plynu větší, tím má plyn více rychlých částic a tím častěji k ionizaci dochází. Když počet ionizací převáží počet rekombinací, míra ionizace plynu se zvyšuje. Při určité teplotě bude v plynu iontů mnohem více než neutrálních částic – takový plyn nazveme **plně ionizovaný**.

5.4 Stínění nábojů

Představte si, že do ionizovaného plynu vložíme kladně nabitou kuličku. Kulička kolem sebe vytváří elektrické pole, které vidíme na obrázku 41a. Červené šrafování představuje rovnoměrné rozložení kladně nabitých iontů a modré šrafování rozložení

elektronů. Neutrální částice zobrazeny nejsou, v plynu být vůbec nemusí a i kdyby byly, tak na následující nemají zásadní vliv. Záporně nabitě elektrony jsou ke kuličce přitahovány, kladné ionty jsou polem taženy od kuličky pryč.

Elektrony s malou kinetickou energií jsou polem zachyceny – pohybují se v blízkosti kuličky a nemají dostatečnou energii k tomu, aby unikly. Rychlé elektrony využijí část své kinetické energie na překonání potenciálové bariéry vytvořené elektrickým polem a od kuličky uniknou. Můžeme si představit, že kulička je v důlku spolu s elektrony. Málo energetické elektrony nedokáží z důlku vyskočit a zůstanou tam. Rychlé elektrony mají dost energie, aby z důlku vyskočily.



obr. 41: Elektrické pole okolo nabitě kuličky těsně po vložení do plazmatu a po odstínění

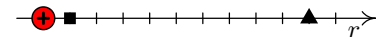
Nabitá kulička je v ionizovaném plynu velmi rychle obklopena vrstvou pomalejších elektronů, obr. 41b. Za touto vrstvou je nyní elektrické pole slabší, než v okamžiku vložení kuličky do ionizovaného plynu – vektor elektrického pole v bodě M je kratší než na obrázku 41a. Způsobují to kuličkou uvězněné elektrony, které část vloženého náboje **odstíní**. Elektrické pole v místě M už nevytváří jen kladně nabitá kulička, ale také zachycené elektrony, které díky opačnému znaménku výsledný náboj snižují.

Elektrické pole vytvořené nábojem Q působí ve vakuu na náboj q silou, jejíž velikost určuje Coulombův zákon

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{r^2}, \quad (39)$$

kde ϵ_0 je konstanta zvaná permitivita vakua a r je vzdálenost nábojů Q a q .

Coulombův zákon nám říká, že ve vakuu elektrické pole klesá s druhou mocninou vzdálenosti, tzn. v místě trojúhelníčku (obr. 42), který je od náboje desetkrát dál než čtvereček, je pole stokrát slabší než v místě čtverečku. V ionizovaném plynu klesá elektrické pole s rostoucí vzdáleností ještě rychleji. Způsobují to nábojem uvězněné opačně nabitě částice, které vložený náboj v prostoru postupně odstiňují. Pokles způsobený odstiňováním je exponenciální, a tak v ionizovaném plynu by elektrické pole v místě trojúhelníčku z obrázku 42 bylo více než osmtisíckrát slabší než ve čtverečku, ($\frac{e^1}{e^9} = \frac{1}{e^9} \doteq \frac{1}{2,71828^9} \doteq \frac{1}{8103}$, e je Eulerovo číslo 2,718...).



obr. 42: Vzdálenost od náboje

Vzdálenost, kde pole zasláblo na 37% (na „jednu e -tinu“) své maximální hodnoty, nazýváme **Debyeova stínící délka**. Budeme ji značit d , její jednotkou je metr; kouli o poloměru d říkáme Debyeova sféra.

Elektrické pole ve vzdálenostech výrazně menších než Debyeova stínící délka d je velmi málo odstíněno. Zde můžeme pole popsat Coulombovým zákonem (odstínění hraje minimální roli). Ve vzdálenostech větších než d je náboj dostatečně odstíněn a pole klesá exponenciálně. Na velkých vzdálenostech bychom měli také započítat kvadratické klesání z Coulombova zákona, to je ovšem oproti exponenciále zanedbatelné.

Jsou-li částice plynu pomalé, z blízkého okolí vloženého náboje se téměř všechny využijí na odstínování. Pouze velmi malé množství částic dokáže uniknout, a tak studený ionizovaný plyn odstíní náboj na malém objemu. V horkém ionizovaném plynu má velké množství částic dostatečnou energii k úniku a jen malá část jich uvízne. Proto pro odstínění téhož vloženého náboje je třeba daleko větší prostor než v plynu studeném.

S rostoucí teplotou plynu roste Debyeova stínící délka.

Obsahuje-li plyn velké množství nabitých částic v jednotce objemu, odstíní vložený náboj na menším prostoru než plyn „chudý“ na nabitě částice.

S rostoucí hustotou nabitých částic v plynu klesá Debyeova stínící délka.

Debyeova stínící délka d je dána vztahem

$$d = \sqrt{\frac{\epsilon_0 kT}{Ne^2}}. \quad (40)$$

T značí teplotu plynu, k je Boltzmannova konstanta, ϵ_0 permitivita vakua, N je počet stejně nabitých částic v 1 m^3 a e náboj elektronu. Vztah (40) odvozovat nebudeme. Všimněme si jen, že teplota se vyskytuje v čitateli zlomku a počet nabitých částic ve jmenovateli – vztah odpovídá našim předcházejícím úvahám.

V mezihvězdném prostoru je řádově $N = 10^5$ a $d = 10$ m, několik stovek kilometrů nad zemským povrchem $N = 10^{12}$, $d = 1$ mm, a uvnitř Slunce $N = 10^{32}$ a $d = 10^{-11}$ m.

5.5 Co je to plazma?

Plazma je ionizovaný plyn, který dokáže odstínit elektrické náboje do něho vložené. Obsahuje volné elektrony a ionty tak, že množství kladného náboje je stejné jako množství záporného. Náboje se mohou shlukovat a elektricky na sebe působit i na větší vzdálenosti – ale ne větší než je Debyeova stínící délka (to už jsou prostředím odstíněné).

V definici plazmatu se používají pojmy kvazineutralita a kolektivní chování.

Kvazineutralita

V kvazineutrálním plynu je množství záporného náboje stejné jako množství kladného (součet veškerého náboje je nulový). Je-li ovšem potřeba, náboje se dokáží přeskupit a reagovat na elektrické síly – vytvářet nebo odstiňovat elektrická pole. Jejich elektrické vlastnosti se neztrácí. (Kvazineutrální bychom mohli přeložit jako „skoro neutrální“.)

Plyn je kvazineutrální, je-li neutrální jako celek, ale jeho nabitě částice se mohou seskupovat a vytvářet lokální náboje.

Kolektivní chování

V plynu složeném pouze z neutrálních částic se částice vzájemně ovlivňují jen v případě jejich srážky (gravitační působení je zanedbatelné). V ionizovaném plynu se nabitě částice mohou vzájemně ovlivňovat i na dálku. Elektrická pole, která byla vytvořena nabitými částicemi, silově působí na ostatní nabitě částice až do vzdálenosti Debyeovy stínící délky. Na delších vzdálenostech je pole dostatečně odstíněno, tak už neuvažujeme jeho působení. Kladně a záporně nabitě částice se pohybují podle svého náboje – chovají se kolektivně.

Plazma je tedy ionizovaný kvazineutrální plyn, který vykazuje kolektivní chování.

Důležitou charakteristikou plazmatu je počet částic (iontů nebo elektronů) stejného znaménka v jednotce objemu; nazýváme ji **koncentrace plazmatu** a značíme N . O počtu neutrálních atomů veličina N nic neříká. Neutrálních částic může být v plazmatu více než nabitých, nebo méně než nabitých; dokonce tam nemusí být ani jedna neutrální částice.

V kapitole o ionizovaném plynu jsme si řekli, že s rostoucí teplotou roste stupeň ionizace plynu. Při dostatečně vysoké teplotě se každý plyn stává plazmatem – z tohoto důvodu se někdy plazma nazývá *čtvrtým skupenstvím hmoty*.

Uvnitř hvězd najdeme dostatečně vysokou teplotu pro přirozený výskyt plazmatu, například uvnitř Slunce teplota dosahuje 15 milionů °C.

5.6 Plazmové oscilace

Představte si plazma ve tvaru krychle, které je složené z velmi pomalých elektronů a kationtů – studené plazma. Na levou stranu od plazmatu dáme kladně nabitou desku (obr. 43a). Elektrony jsou deskou přitahovány, kationty naopak odpuzovány. Elektrony se začnou nalevo přemísťovat velmi rychle (obr. 43b, šipka popisuje směr pohybu). Tak rychle, že jejich tepelný (chaotický) pohyb je oproti kolektivnímu

chování zanedbatelný. Desku rázem vybijeme, například uzemníme. Těžké (špatně pohyblivé) kationty se za tu chvíli sotva pohnou. Elektrické pole na ně působilo stejnou dobu a stejně velkou silou jako na elektrony, ovšem díky své velké hmotnosti je jejich zrychlení mnohem menší než zrychlení elektronů. Tepelný i kolektivní pohyb kationtů nemusíme uvažovat.

Po uzemnění desky elektrony napravo už nic nepřitahuje, naopak nyní jsou kladným nábojem kationtů přitahovány na pravou stranu. Elektronový „mráček“ ve tvaru krychle se začne zrychleně pohybovat doprava (obr. 43c). Když prochází středem původní krychle (43 d) je síla působící na mráček nulová. Díky setrvačnosti se ale elektronový mráček dostává napravo od kationtové krychle (43 e), kde už na něj působí elektrická síla proti jeho pohybu – doleva. Za chvíli tato síla mráček zastaví a rozpohybuje ho zpět doleva (obr. 43 f). Elektronový mráček se pohybuje kolem kationtového jako by byl na pružině.

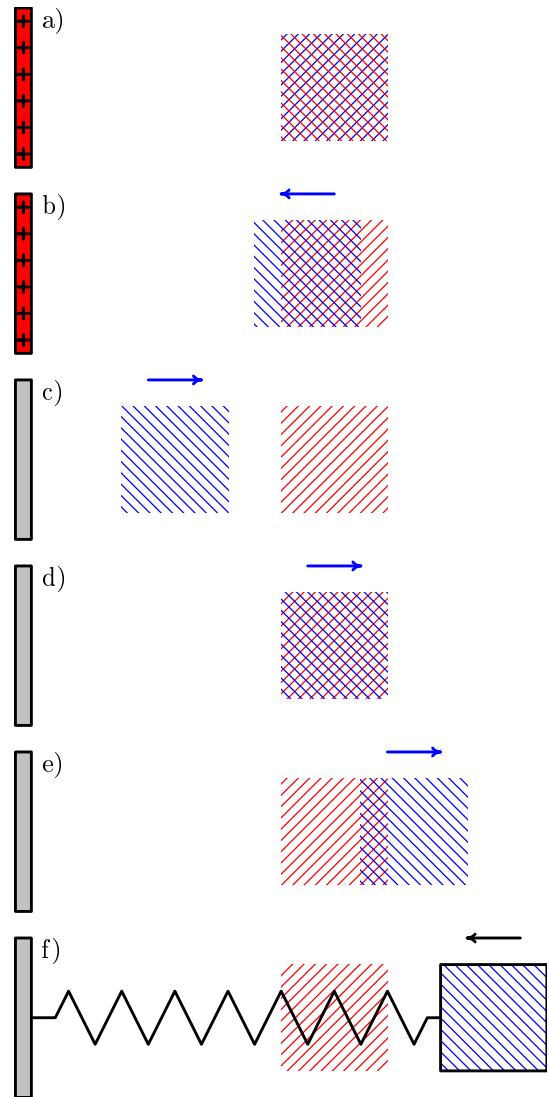
Neboli: Vychýlíme-li elektrony oproti iontovému pozadí, vytvoří se takové elektrické pole, které se svými účinky snaží obnovit neutralitu plazmatu. Jelikož setrvačnost nedovolí elektronům se v rovnovážné poloze zastavit, elektrony vykonávají kmitavý pohyb, který nazýváme **plazmová oscilace**. Úhlová frekvence takových kmitů je **plazmová frekvence**.

Plazmová frekvence ω_p ve studeném plazmatu je dána vztahem

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (41)$$

kde N je koncentrace plazmatu, e je náboj elektronu, ϵ_0 je permitivita vakua a m_e je hmotnost elektronu.

Ze vztahu (41) snadno vidíme, že s rostoucí plazmovou koncentrací N , roste plazmová frekvence – mráček i kationtové pozadí obsahují větší množství náboje,



obr. 43: Plazmové oscilace

a tak se podle Coulombova zákona k sobě více přitahují. Dále vidíme, že kdyby měly elektrony větší náboj, plazmová frekvence by se také zvětšila, protože by opět vzrostla síla, která k sobě opačné náboje přitahuje. A kdyby byly elektrony těžší, „déle by brzdily“, pak by hodnota plazmové frekvence byla nižší.

5.7 Definice plazmatu

Pro odstínění vloženého náboje nabitými částicemi plynu, je třeba dostatečný prostor. Je-li rozměr oblaku ionizovaného plynu výrazně větší než Debyeova délka, tak kdykoli někde vznikne nahloučení náboje, okolní částice mají dostatečný prostor pro jeho odstínění.

První podmínka pro plazma: Rozměr systému musí být řádově větší než Debyeova délka.

Druhá podmínka také souvisí s odstínováním. Aby vůbec mohl být vzniklý náboj odstíněn, je potřeba dostatek částic. Máme-li ionizovaný plyn příliš řídký, v okolí lokálního náboje není dostatek částic na jeho odstínění.

Druhá podmínka pro plazma: Počet nabitých částic v objemu o velikosti Debyeovy sféry musí být výrazně větší než malý.

Poslední kritérium souvisí se srážkami nabitých částic s neutrálními. Kdyby se nabitě částice příliš často srážely s neutrály, jejich pohyb by byl z velké části ovlivněn těmito srážkami a jen minimálně vzájemným působením jejich nábojů. V jejich chování by se náboj téměř neprojevil.

Třetí podmínka pro plazma: Nabitě částice se mohou srazit s neutrálními částicemi pouze zřídka v porovnání s periodou své plazmové frekvence.

Kvazineutrální ionizovaný plyn je plazmatem, jsou-li splněny tři výše zmíněné podmínky.

5.8 Příklady plazmatu na Zemi i mimo ni

Asi 99% hmoty ve vesmíru je v plazmatickém stavu. Naše planeta patří do toho zbyvajících procenta, kde se plazma přirozeně nevyskytuje. Nejznámější příklad plazmatu, plamen, ve skutečnosti plazmatem není – nesplňuje naší třetí podmínku. Plamen je ionizovaný plyn, který sice obsahuje dostatečné množství nabitých částic, ale také velké množství částic neutrálních. Ty se často srážají s nabitými a z velké míry tak ovlivňují jejich pohyb.

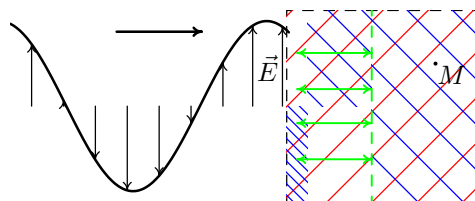
„Opravdové zemské“ plazma nalezneme třeba v blesku, tvoří svítící plyn v zářivkách a neonech nebo polární záře. Když se vzdálíme pouhých 60 km od Země, atmosféra se tam už začíná chovat mírně plazmaticky (více se dozvíme v osmé části). Mezihvězdný prostor, hvězdy i mlhoviny jsou plazma.

5.9 Elektromagnetické vlny v plazmatu

Ze třetí části víme, že elektromagnetická vlna se skládá ze dvou částí, elektrické a magnetické. Šíří-li se vlna vakuem, vektory elektrické intenzity \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} kmitají ve fázi a jsou na sebe kolmé (obr. 12). Fázová rychlost libovolné elektromagnetické vlny ve vakuu je rovna c .

Představme si elektromagnetickou vlnu, která se šíří vakuem a narazí na stěnu krychle studeného plazmatu, obr. 44. Na obrázku je znázorněna pouze elektrická složka vlny \vec{E} kmitající v rovině nákresny. Magnetickou složku kmitající k nám a od nás potřebovat nebudeme.

Elektrické pole vlny na rozhraní vakua a plazmatu ovlivňuje chování nabitých částic v plazmatu. V momentě, který zachycuje obrázek 44, budou záporně nabitě částice polem taženy do spodní části krychle a kladně nabitě do horní. Kvůli velké hmotnosti kationtů nebudeme jejich pohyb uvažovat, důvod vyplyne z dalšího. Elektrony z okolí stěny se shromáždí dole, kde vzniká lokální záporný náboj. Nahoře, odkud elektrony „utekly“, vzniká náboj kladný. Oba náboje budou prostředím odstíněné na vzdálenost Debyeovy stínící délky (zeleně). Do místa M uvnitř plazmatu se žádné elektrické pole nedostane, plazma vše odstíní. Částice uvnitř plazmatu se o vlně vůbec „nedozvědí“.



obr. 44: Vlna na rozhraní plazmatu

Rozebrali jsme si situaci v jednom konkrétním čase. Elektrické pole vlny se ale v čase mění a nabitě částice v plazmatu musí každou chvíli odstiňovat různě silné i orientované elektrické pole. Má-li elektromagnetická vlna malou frekvenci, elektrony stíhají na změny reagovat. Dokáží se přeskupovat a stále odstiňovat měnící se elektrické pole vlny. V takovém případě se vlna do plazmatu vůbec nedostane a odráží se od rozhraní zpátky do vakua.

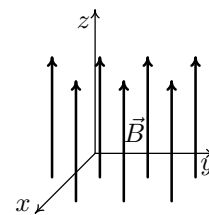
Má-li vlna dostatečně velkou frekvenci, její pole se mění příliš rychle na to, aby na změny elektrony dokázaly reagovat. V takovém případě se vlna dostává do plazmatu a šíří se jím dál (stejně jako třeba obyčejným sklem).

*Pro každé plazma existuje jistá mezní frekvence. Elektromagnetické vlny s nižší frekvencí se od plazmatu odrazí, plazmatem se šířit nemohou. Elektromagnetické vlny s vyšší frekvencí plazmatem prochází. Tato mezní frekvence je rovna **plazmové frekvenci** ω_p , která udává, jak rychle jsou elektrony v plazmatu schopny reagovat na změny elektrického pole.*

Elektromagnetické vlny v plazmatu se řídí dle předchozího odstavce. Chceme-li ovšem popsat šíření vln kolem Země, nesmíme zapomenout na magnetické pole, které kolem sebe naše planeta vytváří a které zásadně ovlivňuje šíření elektromagnetických vln. Pro pokračování je nutné vysvětlit chování nabitých částic v magnetickém poli.

6 Pohyb částic v magnetickém poli

V této části si ukážeme, jak homogenní magnetické pole ovlivňuje pohyb částic. Soustavu souřadnic zvolíme vždy tak, aby vektor magnetické indukce \vec{B} směřoval po směru osy z (obr. 45).



obr. 45: Magn. pole

6.1 Lorentzova síla

Na letící částici magnetickým polem působí Lorentzova síla, která je dána vztahem (křížek značí vektorový součin)

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}), \quad (42)$$

q je náboj částice, \vec{v} je vektor její rychlosti a \vec{B} je vektor magnetické indukce (vyjadřuje směr pole i velikost). Výsledkem vektorového součinu je vektor, který je kolmý na oba dva vstupující vektory a tvoří s nimi pravotočivou soustavu souřadnic. Velikost výsledku je dána délkami vstupujících vektorů a úhlem, který svírají. Pro velikost Lorentzovy síly z rovnosti (42) pak platí

$$|\vec{F}| = |q|vB \sin \alpha, \quad (43)$$

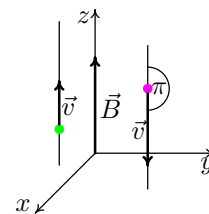
α je úhel mezi vektory \vec{v} a \vec{B} . Velikost vektoru nemůže být záporná, a tak z náboje q použijeme jeho absolutní hodnotu.

6.2 Neutrální částice

Nejprve se podíváme na případ, kdy vletne do magnetického pole neutrální částice. Pro $q = 0$, je pravá strana rovnice (43) nulová a tedy i síla působící na částici je nulová. V takovém případě magnetické pole částici nijak neovlivňuje, částice letí tak, jak by letěla, kdyby tam žádné magnetické pole nebylo (rovnoměrně přímočaře, pokud na částici nepůsobí ještě nějaká jiná síla).

6.3 Nabitá částice: pohyb rovnoběžný s magnetickým polem

Pohybuje-li se naším magnetickým polem nabitá částice rovnoběžně s osou z , úhel, který svírá vektor rychlosti \vec{v} s vektorem magnetické indukce \vec{B} , je buď roven nule (na obrázku 46 zeleně) nebo π (fialově). Pro oba úhly je sinus nulový, a tak velikost síly působící na částici ((43) $|\vec{F}| = qvB \sin \alpha$) je nezávisle na náboji či velikosti rychlosti rovna nule.

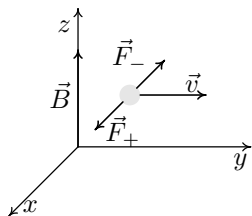


obr. 46: $\vec{v} \parallel \vec{B}_0$

Pohyb nabitě částice, která letí rovnoběžně s magnetickým polem, není polem vůbec ovlivňován.

6.4 Nabitá částice: pohyb kolmý na magnetické pole

Nyní se podíváme na případ, kdy se nabitá částice pohybuje v rovině xy (její z -ová složka rychlosti je nulová). Na obrázku 47 letí kladně nabitá částice ve směru osy y (doprava). Pomocí pravé ruky nebo ciferníku určíme směr vektoru, který je výsledkem vektorového součinu $\vec{v} \times \vec{B}$ (vektory \vec{v} , \vec{B} a výsledný jsou pravotočivé). Výsledek směřuje k nám podél osy x . Po vynásobení kladným nábojem q , vektor změní pouze svoji délku. Lorentzova síla na kladný náboj \vec{F}_+ daná vztahem (42) $\vec{F}_+ = q(\vec{v} \times \vec{B})$ směřuje ve směru osy x . Magnetické pole bude kladně nabitou částici z obrázku 47 „táhnout“ šikmo k nám podél osy x .



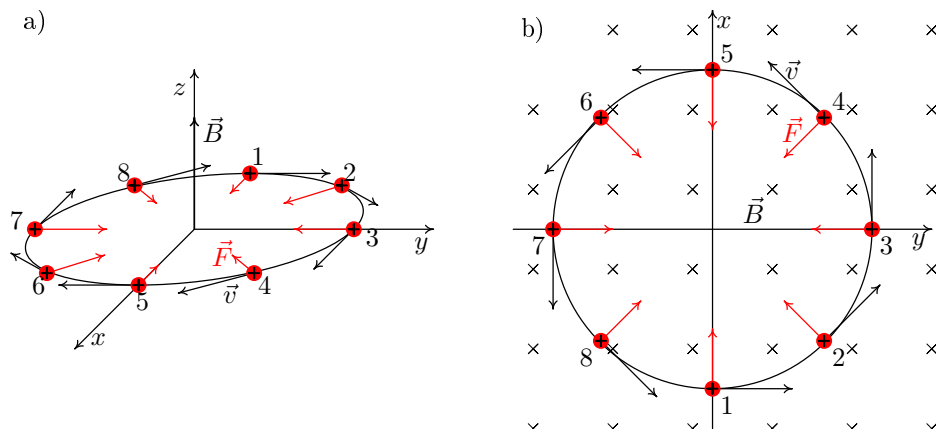
obr. 47: Síla na nabitou částici s $\vec{v} \perp \vec{B}$

že Lorentzova síla \vec{F}_- působící na elektron bude směřovat proti ose x .

Poletí-li stejnou cestou elektron, vektorový součin $v \times B$ se nezmění, ovšem vynásobením záporným nábojem způsobí, že Lorentzova síla \vec{F}_- působící na elektron bude směřovat proti ose x .

Kladný náboj

Situace 1 na 48a odpovídá případu, který jsme právě rozebrali. Kladně nabitá částice letí po směru osy y . Lorentzova síla směřující k nám způsobí zakřivení trajektorie částice. Částice se dostane do polohy 2, kde na ní Lorentzova síla bude působit tak, jak ukazuje obrázek. Přesvědčte se pomocí pravé ruky. Síla trajektorii i zde zakřivuje



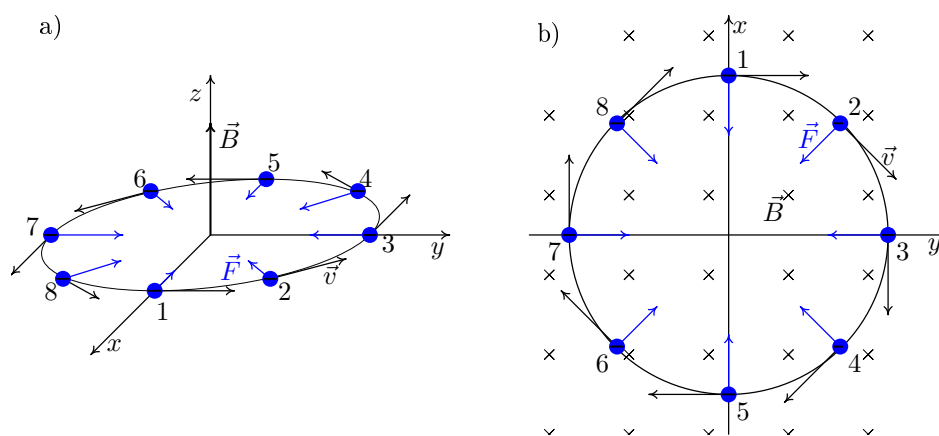
obr. 48: Kladně nabitá částice letící kolmo na směr homogenního magnetického pole

a způsobí, že za chvíli se částice bude nacházet v poloze 3, kde poletí ve směru osy x . Těmito úvahami bychom dospěli až do polohy osm a z ní do té počáteční. Zkuste si, že Lorentzova síla má na 48a ve všech polohách správný směr.

Kladně nabitá částice (jejíž složka rychlosti do směru magnetické indukce je nulová) se v homogenním magnetickém poli pohybuje po kružnici, která leží v rovině kolmé na osu z . Budeme-li se dívat po směru \vec{B} (na obrázku 48a ležíme pod rovinou xy a díváme se nahoru), částice bude rotovat proti směru hodinových ručiček, obr. 48b.

Záporný náboj

Na obrázku 47 jsme si ukázali, jaký směr má Lorentzova síla působící na záporně nabitou částici letící po směru osy y – situace odpovídá poloze 1 na obrázku 49a. Síla stočí trajektorii a částice se dostane do polohy 2 na 49a. I v tomto místě je částice



obr. 49: Záporně nabitá částice letící kolmo na směr homogenního magnetického pole

pod vlivem Lorentzovy síly a trajektorie se opět stočí... Částice proletí všemi osmi polohami na 49a, až se dostane do té první. Její trajektorii bude kružnice. Na rozdíl od kladně nabitě částice rotuje v opačném směru.

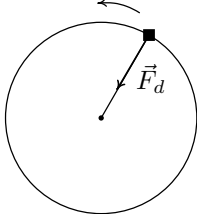
Záporně nabitá částice (jejíž složka rychlosti do směru magnetické indukce je nulová) se v homogenním magnetickém poli pohybuje po kružnici, která leží v rovině kolmé na osu z . Díváme-li se po směru \vec{B} (na obrázku 49a ležíme na zádech pod rovinou xy), částice rotuje po směru hodinových ručiček, obr. 49b.

Shrnutí

Představte si, že jste iont a letíte si vodorovně, rovnoměrně přímočaře. Najednou se dostanete do homogenního magnetického pole, které směřuje zdola nahoru. Pole způsobí, že se váš let změní. Sice poletíte stále stejně rychle, ale budete kroužit po kružnici pořád dokola. Jste-li kladní, budete se otáčet za pravou rukou, jste-li záporní, pak za levou.

6.5 Poloměr kruhové trajektorie

Nejprve si uvedeme příklad z mechaniky. V ruce držíte provázek za jeden konec a na jeho druhém konci je navázaná plechovka. Plechovku roztočíte tak, že se pohybuje po kružnici, obr. 50. Jediná síla, která na plechovku působí je síla provázku. Tato síla musí být rovna dostředivé síle rovnoměrného pohybu po kružnici.



obr. 50: Plechovka

Vrátíme se zpět do magnetického pole, kde „provázkové síle“ odpovídá Lorentzova síla – stále směřuje do středu kružnice, po které částice obíhá. Vzorec pro výpočet dostředivé síly je v případě plechovky i malinkaté částice stejný. Její velikost je dána

$$F_d = \frac{mv^2}{R}, \quad (44)$$

kde m je hmotnost částice (plechovky), v je velikost její rychlosti a R je poloměr kružnice, po které částice obíhá (délka provázku). Dostředivá síla v magnetickém poli na náboji nijak nezávisí.

Velikost Lorentzovy síly je $F = |q|vB \sin\alpha$. Předpokládáme-li, že se částice pohybuje v rovině kolmé na osu z (uvnitř ní libovolným směrem), pak úhel mezi vektory \vec{v} a \vec{B} je vždy 90° . V takovém případě je $\sin\alpha = 1$ a tedy platí

$$F = |q|vB. \quad (45)$$

Velikosti dostředivé a Lorentzovy síly musí být stejně velké, v opačném případě by se částice nepohybovala po kružnici. Vztahy (44) a (45) dáme do rovnosti a vyjádříme si poloměr R

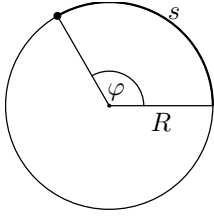
$$\frac{mv^2}{R} = |q|vB \quad \implies \quad R = \frac{mv}{|q|B}, \quad (46)$$

tzn. čím těžší částice, tím větší poloměr kružnice; magnetické pole snadněji změní trajektorii lehké částice než těžké. Čím rychlejší, tím také větší poloměr. S lehkými a pomalými částicemi magnetické pole víc zatočí.

A také: Roste-li náboj (v absolutní hodnotě, více kladný nebo více záporný), poloměr kružnice klesá, magnetické pole velké náboje více ovlivňuje. A nakonec čím je pole silnější (roste velikost \vec{B}), tím je poloměr menší. Hodně nabitě částice v silném poli se víc zatáčí než méně nabitě ve slabém poli.

6.6 Cyklotronová frekvence

Zbývá nám určit úhlovou rychlost kroužících částic v magnetickém poli. Ještě jednou se vrátíme do mechaniky k rovnoměrnému pohybu po kružnici. Pro délku oblouku (uběhnoutou dráhu na obrázku 51) platí



$$s = \varphi R, \quad (47)$$

kde φ měříme v radiánech! Úhel jeden radián je velký tak, že délka oblouku je stejně dlouhá jako poloměr kružnice, obr. 52. Dráhu s nahradíme $s = vt$ a úhel $\varphi = \omega t$ (to už jsme použili v kapitole 1.4). Vztah (47) přejde ve tvar

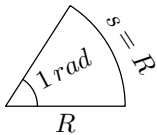
obr. 51: Oblouk

$$vt = \omega t R \quad \implies \quad v = \omega R. \quad (48)$$

Odvodili jsme vztah mezi velikostí rychlosti a úhlovou rychlostí při rovnoměrném pohybu po kružnici. Do vztahu (46) pro poloměr dosadíme za velikost rychlosti v z (48). Vyjádříme úhlovou rychlost (poloměry se zkrátí)

$$R = \frac{m(\omega R)}{qB} \quad \implies \quad \omega = \frac{qB}{m}. \quad (49)$$

Vztah (49) je zlatým hřebem celé části o magnetickém poli. Větší náboje se pohybují s větší ω a tudíž s vyšší frekvencí – za jednu sekundu stihnou více otáček. Silnější magnetické pole také zvyšuje úhlovou rychlost (i frekvenci). A čím těžší částice, tím menší úhlová rychlost (tím jí déle trvá oběhnout jedno kolo).



1 rad \doteq 57°

obr. 52: Definice radiánu

Ze vztahu (49) také plyne, že úhlová rychlost (tedy ani frekvence a perioda) **nezávisí na rychlosti** částice. Pošleme-li jeden rychlý a jeden pomalý elektron do homogenního magnetického pole kolmo na směr siločar, oba se začnou pohybovat po kružnicích. Velikost rychlosti každého z nich se nezmění, rychlý bude obíhat po velké kružnici a pomalý po malé. Jejich úhlové rychlosti i frekvence budou stejné, a tak oba stihnou stejný počet oběhů za jednu sekundu.

Částici s hmotností m a nábojem q , která se pohybuje v magnetickém poli o velikosti B , je vztahem (49) jednoznačně dána její **cyklotronová frekvence**.

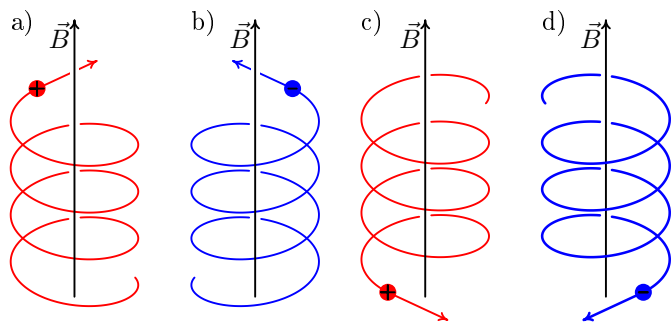
Cyklotronová frekvence elektronu: $\omega_c = \frac{|e|B}{m_e}$ (m_e značí hmotnost elektronu)

Cyklotronová frekvence iontu: $\omega_{ci} = \frac{qB}{m_i}$ (m_i značí hmotnost iontu)

6.7 Nabitá částice: pohyb libovolným směrem

Doposud jsme řešili speciální pohyby částic (rovnoběžný nebo kolmý na vektor magnetické indukce). V této části si vysvětlíme, jak se bude chovat nabitá částice, která vletí do homogenního magnetického pole z libovolného směru.

Mějme magnetické pole jako v předchozích případech $B = (0, 0, B)$, obr. 45. Vektor rychlosti částice v momentě vletnutí do magnetického pole má obecný tvar $v = (v_x, v_y, v_z)$. Z předchozího už víme: Pohybuje-li se nabitá částice v rovině kolmé na směr magnetického pole (nenulové v_x nebo v_y), pole způsobí otáčivý pohyb kolmo na z . A také, že pohyb rovnoběžný s osou z (nenulová v_z) není magnetickým polem ovlivněn.



obr. 53: Pohyb nabitých částic v magnetickém poli; na šroubovice se díváme mírně shora

kladně nabitě částice v homogenní magnetickém poli (jdete po levotočivé šroubovici⁸ vzhledem ose věže, obr. 53a). Vaše pravá ruka představuje Lorentzovu sílu, je vodorovně a směřuje stále k ose věže.

Poběžíte-li po stejných schodech dolů, budete se sice zábradlí přidržovat levou rukou, „váš náboj“ se ale nezmění. Představujete stále kladně nabitou částici, která letí po levotočivé šroubovici vzhledem k ose věže, obr. 53c.

Spojením krouživého pohybu s rovnoměrným posunem dostaneme pohyb po šroubovici, obr. 53.

Představte si, že jdete stále stejně rychle po pravotočivých schodech⁷ nahoru do hradní věže. Osu věže máte po pravé ruce a okénka po levé. Přidržíte se pravou rukou zábradlí.

Váš pohyb je stejný jako pohyb

6.8 Prostředí tvořené magnetickým polem

Magnetické pole vytváří anizotropní prostředí vzhledem k pohybu nabitých částic. Trajektorie pohybu obecně záleží na směru, jakým částice do pole vletí.

Prostředí je navíc válcově symetrické. Nezáleží, zda částice s daným nábojem a danou rychlostí vletí do pole podél osy x , podél y nebo jakkoli šikmo v rovině xy . Pokaždé je její trajektorií kružnice o stejném poloměru ležící v rovině xy . Všechny směry v rovině kolmé na význačnou osu jsou navzájem ekvivalentní.

⁷ Při dobývání hradu se na pravotočivých schodech pravorukému obránci s mečem shora brání lépe než se zdola útočí pravorukému útočníkovi. Ten musí útočit „za roh“.

⁸ Názvy schodišť a šroubovic jsou opačné.

7 Vlny v plazmatu s magnetickým polem

V této části textu využijeme téměř vše, co jsme si doposud řekli. Homogenní magnetické pole (část 6) vytváří v plazmatu (část 5) anizotropní, válcově symetrické prostředí (část 4) vzhledem k šíření elektromagnetických vln (část 3).

Budeme uvažovat pouze studené plazma, jehož částice nevykonávají žádný chaotický pohyb. Volné elektrony se pak pohybují pouze v důsledku působení nějakého elektrického nebo magnetického pole.

Vektor elektrické intenzity vlny budeme značit \vec{E} , vektor magnetické indukce \vec{B} . Pro označení vnějšího magnetického pole použijeme \vec{B}_0 . Jeho velikost bude vždy výrazně větší než velikost magnetického pole libovolné vlny, $|\vec{B}| \ll |\vec{B}_0|$. Vnější pole \vec{B}_0 budeme uvažovat pouze homogenní a směřující ve směru osy z .

Uvedené závěry nebudeme odvozovat – k tomu je třeba umět řešit diferenciální rovnice, kde neznámá není číslo ale funkce. V odvození se vychází z druhého Newtonova zákona $\vec{F} = m\vec{a}$ a pohybové rovnice nabitě částice v elektromagnetickém poli $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}_0)$. Dále jsou třeba Maxwellovy rovnice, které popisují chování elektromagnetického pole.

7.1 Mezní frekvence

Elektromagnetická vlna o velmi vysoké frekvenci, která se šíří vakuem, narazí na rozhraní vakua s plazmatem bez vnějšího magnetického pole. Jak jsme si řekli v kapitole 5.9, vlna prochází do plazmatu, neboť volné elektrony nestíhají odstínit rychle se měnící elektrické pole vlny. Frekvence vlny se nezmění, je stálá v jakémkoli prostředí (kapitola 4.2). Vlnová délka zůstává také beze změn.

Vyšleme-li vlnu s nižší frekvencí (její úhlová frekvence ω je stále ještě vyšší než plazmová frekvence plazmatu ω_p), vlna projde do plazmatu. Frekvence vlny se nezmění, ale pohyb nabitých částic v plazmatu způsobí protažení vlnové délky vlny. Se vzrůstem vlnové délky λ souvisí vzrůst fázové rychlosti – jednotlivé vlny jsou delší a vytváří se stejným tempem, konkrétní fáze se tedy za stejný čas dostane dál. Naší vlně přísluší fázová rychlost větší než c , kterou vlna měla ve vakuu, $v_f > c$. Grupová rychlost vlny klesne.

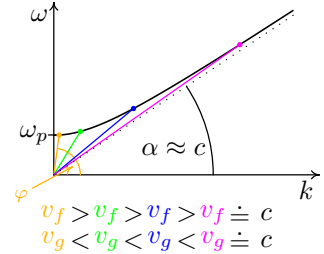
Bude-li frekvence, resp. úhlová frekvence vlny, stále bližší plazmové frekvenci prostředí, vlnová délka vlny v plazmatu bude delší a delší až bude nejdélší na celém světě. Spolu s vlnovou délkou poroste k nekonečným hodnotám také velikost fázové rychlosti. Grupová rychlost naopak bude klesat k nule, informace nesená takovou vlnou se nikam nepřenese.

Frekvenci vlny, při které vlnová délka a fázová rychlost roste nade všechny meze, nazýváme **mezní frekvencí**. Pro vlny s touto frekvencí index lomu n klesá k nule,

$n = \frac{c}{v_f}$ vztah (23). Vlna s mezní frekvencí nepřenese žádnou informaci, její grupová rychlost je rovna nule.

Jestliže vyšleme elektromagnetickou vlnu s frekvencí, resp. úhlovou frekvencí, rovnou nebo nižší plazmové frekvenci plazmatu, $\omega \leq \omega_p$, vlna se od plazmatu odrazí nazpět.

Na obrázku 54 je disperzní relace, která popisuje chování elektromagnetických vln v plazmatu. S grafem jsme se už setkali ve druhém příkladě kapitoly 4.7. Vidíme, že vlny s $\omega < \omega_p$ se prostředím nešíří – nepřipadá jim žádné vlnové číslo. Žlutě značené vlny s úhlovou frekvencí těsně nad ω_p , mají velký úhel φ a tedy i velkou v_f . Velikost grupové rychlosti žluté vlny je naopak téměř nulová, křivka ve žlutém bodě skoro neroste.



obr. 54: Závislost ω na k

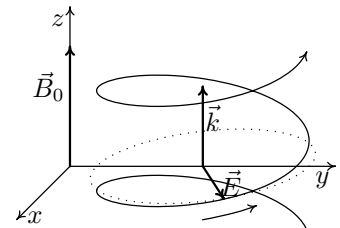
Pohybujeme-li po grafu k vyšším frekvencím, fázová rychlost postupně klesá a grupová roste. Ružově označená vlna s vysokou ω má $v_f \doteq \gamma \doteq \alpha$, a tudíž $v_f \doteq v_g \doteq c$, šíří se jako ve vakuu.

7.2 Rezonance

Na obrázku 55 je znázorněna elektromagnetická kruhově polarizovaná vlna šířící se plazmatem ve směru magnetického pole; vlnový vektor \vec{k} je rovnoběžný s vektorem \vec{B}_0 . Díváme-li se po směru vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 , vektor elektrické intenzity vlny \vec{E} opisuje kružnici po směru hodinových ručiček. Pod vlivem tohoto elektrického pole se volné elektrony plazmatu pohybují v rovinách kolmých na směr magnetického pole \vec{B}_0 , a jejich trajektorie jsou vnějším polem zakřivovány také ve směru chodu hodinových ručiček (kapitola 6.4, obr. 49).

Úhlová rychlost krouživých pohybů, cyklotronová frekvence, všech elektronů je dána vztahem (49) $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$.

Jestliže se úhlová frekvence vlny z obrázku 55 přibližuje k cyklotronové frekvenci elektronů v plazmatu, prostředí se stává pro vlnu hůře průchodné. Stále větší část energie vlny využívají volné elektrony pro svůj krouživý pohyb. Index lomu postupně roste nade všechny meze, fázová rychlost klesá k nule, vlna se přestává šířit. Říkáme, že nastává **rezonance**. Při rezonanci je vedle fázové rychlosti nulová také vlnová délka. Vlna s danou frekvencí ω , která nikam nepostupuje ($v_f = 0$), musí mít vlnovou délku rovnu nule.



obr. 55: Kruhově pol. vlna

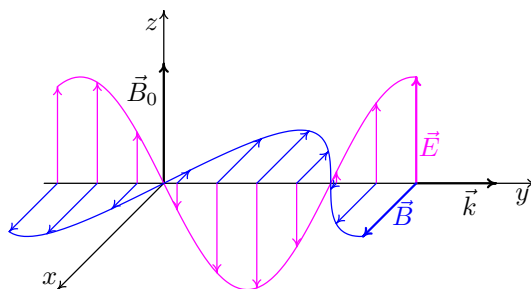
Při rezonanci je vlna prostředím absorbována, při mezní frekvenci se od plazmatu odráží.

7.3 Elektromagnetické vlny ve směru kolmém na \vec{B}_0

Ukážeme si chování dvou význačných vln, které se šíří studeným plazmatem kolmo na vnější magnetické pole. Ostatní vlny šířící se stejným směrem lze z těchto „základních“ vždy složit.

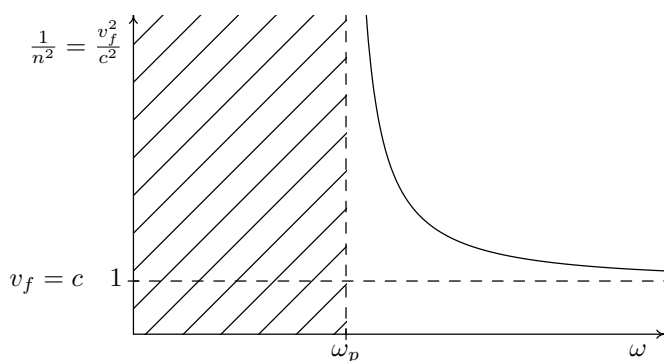
Řádná vlna

Jako první si rozebereme elektromagnetickou vlnu šířící se plazmatem ve směru osy y ($\vec{k} \parallel y$), jejíž elektrická složka \vec{E} kmitá rovnoběžně s vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 a magnetická složka \vec{B} podél osy x (obr. 56).



obr. 56: Řádná vlna

Na nabitě částice plazmatu působí elektrické pole vlny a rozpohybuje je podél vnějšího magnetického pole nahoru a dolů. Z části 6.3 víme, že když se nabitá částice pohybuje v magnetickém poli rovnoběžně s \vec{B}_0 , není její pohyb tímto polem nijak ovlivněn. Naše elektromagnetická vlna tak žádné vnější magnetické pole „necítí“, neboť okolní prostředí se chová stejně, jako kdyby tam žádné magnetické pole nebylo.



obr. 57: Disperzní relace řádné vlny

Na obrázku 57 je graf závislosti $\frac{v_f^2}{c^2}$ na úhlové frekvenci vlny ω (jde o typ disperzní relace). Dle vztahu (23) můžeme poměr $\frac{v_f^2}{c^2}$ vyjádřit zlomkem $\frac{1}{n^2}$. Stoupáme-li po svislé ose nahoru, velikost fázové rychlosti roste; index lomu naopak klesá. Jednička na svislé ose odpovídá případu, kdy se velikost fázové rychlosti vlny rovná rychlosti světla ($1 = \frac{v_f^2}{c^2} \Rightarrow v_f = c$). Index lomu je zde roven jedné. Nekonečně vysoké hodnoty odpovídají mezní frekvenci – zlomek $\frac{v_f^2}{c^2}$ je nekonečný, tak i v_f je nekonečná. Při nulové hodnotě na svislé ose dochází k rezonanci – zlomek $\frac{v_f^2}{c^2}$ je nulový a tudíž v_f je nulová.

*Lineárně polarizovaná vlna z obrázku 56 se nazývá **řádná vlna** a budeme ji značit písmenem O (z angl. ordinary wave). Šíření řádné vlny nezávisí na vnějším magnetickém poli.*

Na obrázku 57 je graf závislosti $\frac{v_f^2}{c^2}$ na úhlové frekvenci vlny ω (jde o typ disperzní relace). Dle vztahu (23) můžeme poměr $\frac{v_f^2}{c^2}$ vyjádřit zlomkem $\frac{1}{n^2}$.

Z disperzní relace řádné vlny vidíme, že pro $\omega < \omega_p$ se vlna prostředím vůbec nešíří – vyšrafovaná oblast. Plazmová frekvence ω_p je mezní frekvencí řádné vlny (fázová rychlost nekonečná, index lomu nulový). Se zvyšující se úhlovou frekvencí vlny klesá velikost fázové rychlosti, index lomu naopak roste od nuly až k jedničce. Pro obrovské frekvence, je fázová rychlost téměř rovna c a index lomu jedničce – vlna prochází plazmatem stejně jako vakuem.

Mimořádná vlna

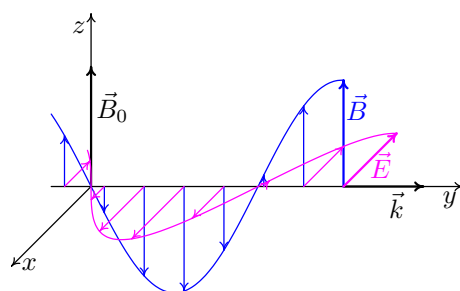
Mohli bychom předpokládat, že druhou „základní“ vlnou šířící se kolmo na magnetické pole, bude také lineárně polarizovaná vlna s $\vec{k} \parallel y$, $\vec{E} \parallel x$ a $\vec{B} \parallel z$ z obrázku 58. Ovšem ukazuje se, že taková vlna v plazmatu s vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 vůbec nemůže existovat.

Vlna musí být elipticky (popř. kruhově) polarizovaná v rovině kolmé na magnetické pole \vec{B}_0 . Vektor elektrické intenzity vlny má tedy nejen x -ovou ale i y -ovou složku, $\vec{E} = (E_x, E_y, 0)$, jak vidíme na obrázku 59. (V případě rovnosti $E_{xA} = E_{yA}$ jde o kruhovou polarizaci.)

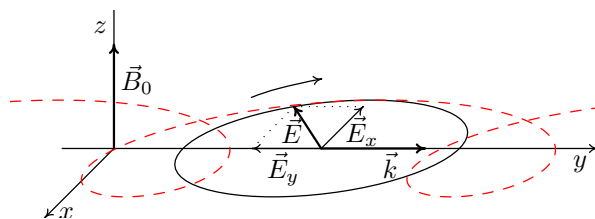
Složka E_x odpovídá normální příčné elektromagnetické vlně s $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ z obrázku 58. Složka E_y odpovídá podélné vlně, kde vektor elektrické intenzity \vec{E} kmitá rovnoběžně s vlnovým vektorem \vec{k} . Této vlně úplně chybí magnetická část \vec{B} a nazývá se elektrostatická. V plazmatu tvoří obě složky E_x a E_y jedinou vlnu a jsou navzájem neoddělitelné. Vektor elektrické intenzity \vec{E} celé vlny opisuje červenou křivku z obrázku 59 (pohyb po elipse, která se posunuje doprava).

*Elipticky (kruhově) polarizovaná vlna v rovině kolmé na vnější magnetické pole \vec{B}_0 , která se šíří studeným plazmatem ve směru kolmém k \vec{B}_0 , se nazývá **mimořádná vlna**. Konec vektoru \vec{E} obíhá po křivce, kterou vidíme na obrázku 59 červeně. Mimořádná vlna se značí písmenem X (z angl. extraordinary wave).*

Chování mimořádné vlny je složitější než vlny řádné, neboť vnější magnetické pole \vec{B}_0 ovlivní pohyb volných elektronů, které se rozhýbaly díky elektrickému poli vlny v rovině kolmé na \vec{B}_0 . Disperzní relace X-vlny je na obrázku 60.

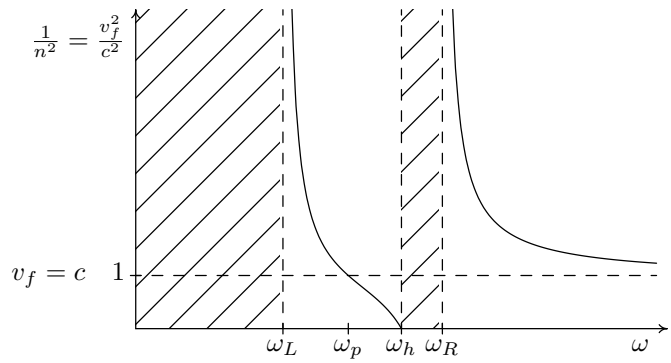


obr. 58: V plazmatu neexistující vlna



obr. 59: Mimořádná vlna

Mimořádná vlna má dvě oblasti šíření a dvě zakázaná pásma. V prvním povoleném pásmu velikost fázové rychlosti nabývá všech možných hodnot; pro $\omega = \omega_p$ je $v_f = c$. V druhém pásmu najdeme hodnoty pouze z intervalu $\langle c, \infty \rangle$ – fázové rychlosti vln s vysokými frekvencemi považujeme za rovnou rychlosti světla.



obr. 60: Disperzní relace mimořádné vlny

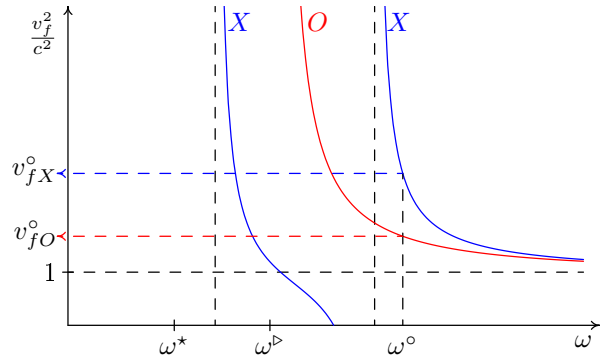
V hodnotách ω_L a ω_R má mimořádná vlna mezní frekvence, rezonance nastává jednou při $\omega = \omega_h$. Hodnoty ω_L , ω_R i ω_h závisí jak na plazmové frekvenci ω_p (a tedy na hustotě plazmatu N , $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$), tak na cyklotronové frekvenci ω_c (a tudíž na vnějším magnetickém poli B_0 , $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$)⁹.

Řádná vlna s mimořádnou dohromady

Mějme elektromagnetickou vlnu šířící se plazmatem kolmo na směr vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 . Naše vlna se dá rozložit na dvě složky – řádnou a mimořádnou. Na obrázku 61 vidíme disperzní relace obou vln v jediném grafu.

Je-li úhlová frekvence vlny ω° , z obrázku 61 vyčteme, že řádná vlna postupuje plazmatem s fázovou rychlostí menší než mimořádná, $v_{fO}^\circ < v_{fX}^\circ$. Pro grupové rychlosti platí opačný vztah, $v_{gO}^\circ > v_{gX}^\circ$, řádná vlna přeneše informaci na stejné vzdálenosti rychleji než mimořádná.

Má-li naše vlna v plazmatu úhlovou frekvenci rovnou ω^\triangleright , pak jde čistě o vlnu mimořádnou – řádná vlna o úhlové frekvenci ω^\triangleright se v plazmatu nemůže vyskytovat. Kdybychom vyslali do vakua elektromagnetickou vlnu s ω^\triangleright a s $\vec{E} \parallel \vec{B}_0$ (obr. 56), tak až dojde k plazmatu, odrazí se od něj zpět.



obr. 61: Řádná (červeně) a mimořádná vlna (modře)

⁹vztahy pro ω_L , ω_R a ω_h vyplynou z úprav pohybových rovnic:
 $\omega_L = \frac{1}{2}(-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$, $\omega_R = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$, $\omega_h = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}$

A naposledy, elektromagnetická vlna s úhlovou frekvencí ω^* se plazmatem ve směru kolmém na \vec{B}_0 šířit nemůže. Přejde-li jakákoli vlna s $\vec{k} \perp \vec{B}_0$ na rozhraní vakua s plazmatem, tak se celá odráží zpět.

Šíří-li se elektromagnetická vlna plazmatem kolmo na magnetické pole \vec{B}_0 , lze rozložit na řádnou a mimořádnou část. Chování obou složek je navzájem nezávislé.

Všimněme si ještě, že se křivky grafů pro řádnou a mimořádnou vlnu nikde neprotínají. Pro konkrétní úhlovou frekvenci ω je vždy velikost fázové rychlosti řádné vlny jiná než velikost fázové rychlosti vlny mimořádné. Uvažujeme-li velmi vysoké frekvence, pak fázové rychlosti obou částí můžeme považovat za shodné a rovny c .

7.4 Elektromagnetické vlny rovnoběžné s \vec{B}_0

Ve směru rovnoběžném s magnetickým polem vystačíme také se dvěma „základními“ vlnami.

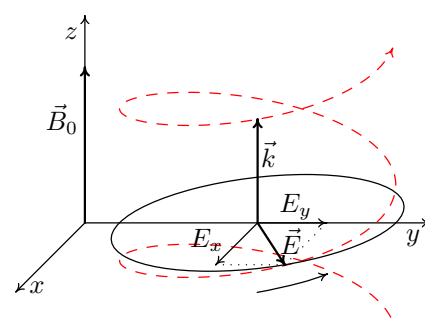
Pravotočivá vlna

Představme si elektromagnetickou vlnu šířící se podél vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 , jejíž vektor elektrické intenzity \vec{E} je kruhově polarizován v rovině kolmé k \vec{B}_0 a při pohledu ve směru \vec{B}_0 se otáčí po směru hodinových ručiček. S touto vlnou jsme si už setkali v kapitole o rezonanci. Vektor magnetické indukce \vec{B} naší vlny se také otáčí po směru hodinových ručiček v rovině kolmé na \vec{B}_0 a vždy ukazuje kolmo k \vec{E} .

Elektrické pole vlny rozhýbe volné elektrony v plazmatu v rovinách kolmých na vnější magnetické pole \vec{B}_0 , to bude jejich trajektorie zakřivovat také do směru hodinových ručiček. Všechny elektrony budou kroužit se stejnou frekvencí odpovídající jejich cyklotronové frekvenci ω_c . Frekvence vlny neovlivňuje frekvenci pohybu elektronů, vlna jej pouze umožní.

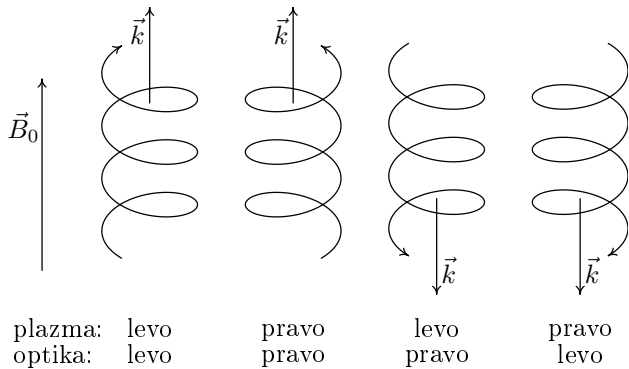
*Kruhově polarizovanou vlnu, která se šíří studeným plazmatem rovnoběžně s magnetickým polem a jejíž vektor elektrické intenzity \vec{E} se při pohledu ve směru \vec{B}_0 otáčí ve směru hodinových ručiček, nazýváme **pravotočivou vlnou** a značíme ji písmenem R (z angl. *right-handed wave*). Konec vektoru \vec{E} v prostoru opisuje pravotočivý šroub.*

Pojem pravotočivá vlna se používá v řadě oblastech fyziky, ovšem může být různě definovaný. My jsme smysl otáčení vztáhli k vnějšímu magnetickému poli – palec pravé ruky ukazuje ve směru \vec{B}_0 , pokud ohnuté prsty ruky ukazují směr rotace



obr. 62: Pravotočivá vlna

vektoru \vec{E} ve vlně, pak je vlna pravotočivá (v opačném případě je levotočivá). Šířili se elektromagnetické vlny plazmatickým prostředím, pak pravotočivým (druhé a čtvrté z obr. 63) případnou vždy shodné velikosti rychlostí.

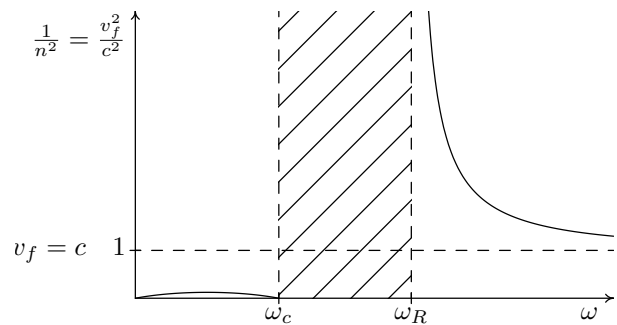


obr. 63: Odlišné definice pravotočivé a levotočivé vlny; pohled shora jako na obr. 53

V optice se pravotočivost resp. levotočivost definuje vzhledem k vlnovému vektoru vlny \vec{k} (směru šíření vlny), nikoli vzhledem k okolnímu prostředí. Palec pravé ruky ukazuje ve směru šíření vlny, jestliže prsty odpovídají směru otáčení vektoru \vec{E} , vlna je pravotočivá. V optických prostředích také platí, že pravotočivým vlnám (tentokrát ale druhé a třetí) vždy odpovídají stejné velikosti rychlostí, které mohou být odlišné od levotočivých.

Kruhově nebo elipticky polarizovanou vlnu lze složit ze dvou lineárně polarizovaných, ovšem díky krouživému pohybu volných elektronů v plazmatu s magnetickým polem je vhodné za „základní kameny“ volit právě pravotočivou a (jak uvidíme dále) levotočivou elektromagnetickou vlnu.

Z kapitoly 7.2 o rezonanci už víme, že pravotočivá vlna s úhlovou frekvencí rovnou cyklotronové frekvenci $\omega = \omega_c$, je s plazmatem v rezonanci. Volné elektrony využijí veškerou energii vlny ke svému krouživému pohybu. Na obrázku 64 vidíme celou disperzní relaci R-vlny.



obr. 64: Disperzní relace pravotočivé vlny

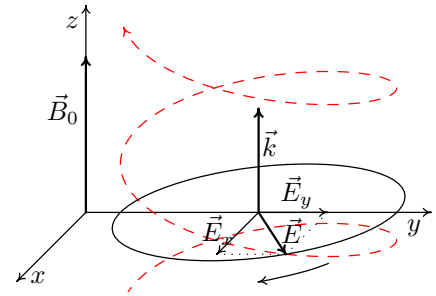
Pravotočivá vlna má dvě oblasti šíření. V oblasti nízkých frekvencí je fázová rychlost R-vlny menší než c , v druhém pásmu je tomu naopak. Vlny o vysokých frekvencích plazma téměř neovlivňuje, jejich fázová rychlost je stejná jako ve vakuu.

Vedle rezonance má pravotočivá vlna jednu mezní frekvenci při $\omega = \omega_R$. S ω_R jsme se setkali už u mimořádné vlny, ω_R je závislá na plazmové i cyklotronové frekvenci¹⁰.

¹⁰ $\omega_R = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$

Levotočivá vlna

Na obrázku 65 je zakreslena kruhově polarizovaná elektromagnetická vlna s $\vec{k} \parallel \vec{B}_0$ a s vektorem elektrické intenzity \vec{E} otáčejícím se proti směru hodinových ručiček, díváme-li se po směru vektoru \vec{B}_0 . Elektrické pole vlny rozhýbe volné elektrony plazmatu. Jejich trajektorie jsou vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 zakřivovány do opačného směru než v jakém rotuje vektor \vec{E} . Znovu připomeňme, že frekvence s jakou krouží volné elektrony není závislá na frekvenci vlny, ale je vždy rovna cyklotronové frekvenci ω_c .



obr. 65: Levotočivá vlna

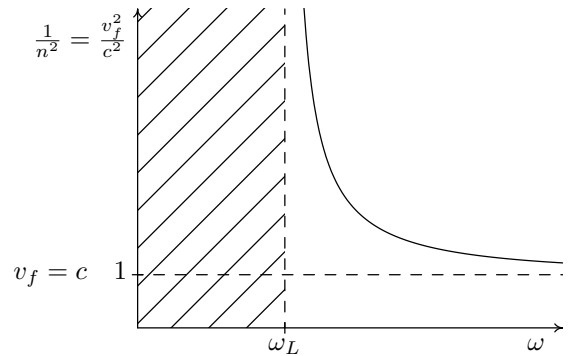
*Kruhově polarizovaná elektromagnetická vlna z obrázku 65 se nazývá **levotočivá vlna**. Při pohledu po směru vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 vektor elektrické intenzity \vec{E} obíhá proti směru hodinových ručiček, v prostoru pak konec vektoru opisuje levotočivý šroub. Levotočivou vlnu označujeme písmenem L (angl. left-handed wave).*

Disperzní relaci levotočivé vlny vidíme na obrázku 66. Z grafu vyčteme, že nižší frekvence se plazmatem nešíří, vyšší ano. Hranicí je mezní frekvence ω_L , kterou už známe od mimořádné vlny. Hodnota ω_L je dána hustotou plazmatu a velikostí vnějšího magnetického pole¹¹.

Doposud jsme uvažovali plazmatické prostředí, ve kterém se ionty vůbec nepohybují, ovšem při zkoumání vln o velmi nízkých frekvencích je tento model příliš hrubý. Připustíme-li pohyb iontů, nalezneme u levotočivé vlny rezonanční frekvenci rovnou cyklotronové frekvenci kladně nabitých iontů. Při úhlové frekvenci vlny ω blízké cyklotronové frekvenci iontů, částice využijí energii vlny pro svůj krouživý levotočivý pohyb v rovinách kolmých k \vec{B}_0 .

Vodíkový kationt H^+ má $1840 \times$ větší hmotnost než elektron. Ze vztahu (49) pro cyklotronovou frekvenci nabitě částice, $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$, snadno usoudíme, že cyklotronová frekvence iontu je $1840 \times$ menší než elektronu. U ostatních prvků je poměr hmotností ještě větší a tudíž poměr cyklotronových frekvencí ještě menší.

Povolený pohyb iontů výrazně změní disperzní relaci levotočivé vlny. Podobně



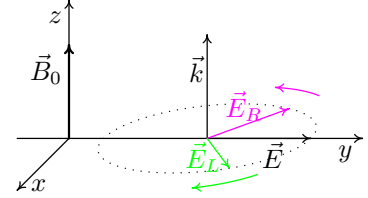
obr. 66: Disperzní relace levotočivé vlny

¹¹ $\omega_L = \frac{1}{2}(-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2})$

jako pravotočivá vlna bude mít povolené pásmo v oblasti nízkých frekvencí shora omezené rezonanční frekvencí, iontovou cyklotronovou frekvencí ω_{ci} .

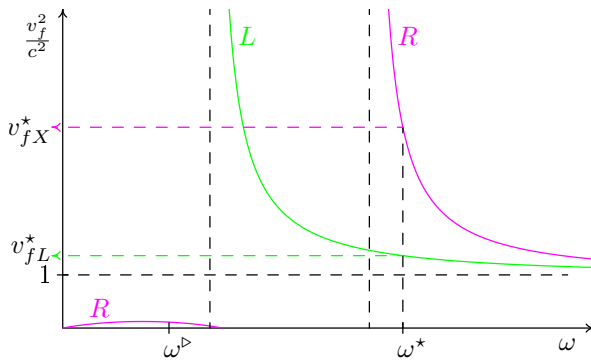
Pravotočivá vlna dohromady s levotočivou

Mějme lineárně polarizovanou vlnu šířící se podél osy z s \vec{E} kmitajícím podél osy y . Naši vlnu lze rozložit do pravotočivé a levotočivé vlny, jejichž vektory elektrické intenzity mají poloviční délku amplitudy lineárně polarizované vlny. V každém okamžiku se y -ové složky točivých vln sečtou a x -ové se přesně vyruší, obr. 67. Výsledný vektor elektrické intenzity $\vec{E} = \vec{E}_R + \vec{E}_L$ tak kmitá pouze podél osy y .



obr. 67: Lineárně polarizovaná vlna složená z levo a pravotočivé

Z grafu na obrázku 68 snadno zjistíme, že narazí-li lineárně polarizovaná vlna o úhlovou frekvenci ω^\triangleright na plazma s magnetickým polem, pravotočivá část proniká do prostředí a šíří se dál s fázovou rychlostí v_{fR}^* . Levotočivá část vlny se odráží nazpátek, protože se plazmatem šířit nemůže.



obr. 68: Pravotočivá a levotočivá vlna

Má-li lineárně polarizovaná vlna úhlovou frekvenci ω^* , pak celá proniká do plazmatu. Pravotočivé části vlny případně velikost fázové rychlosti v_{fR}^* , levotočivé pak v_{fL}^* .

U elektromagnetických vln šířících se podél magnetického pole také platí naprostá nezávislost pravotočivé a levotočivé části vlny.

Překryjeme-li grafy přes sebe, zjistíme, že se křivky nikde neprotínají – pro libovolnou úhlovou frekvenci ω se

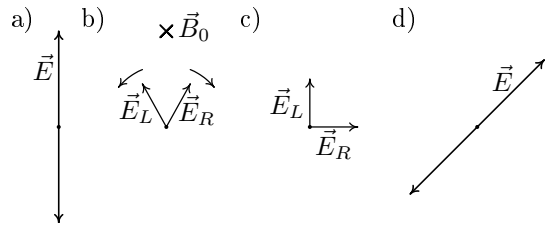
pravotočivá vlna šíří jinou fázovou rychlostí než levotočivá.

Faradayova rotace

Představme si lineárně polarizovanou vlnu, která se šíří vodorovně směrem od nás a jejíž vektor elektrické intenzity \vec{E} kmitá svisle, obr. 69a.

Vlna vstoupí do plazmatického prostředí s vnějším magnetickým polem \vec{B}_0 . Vektor \vec{B}_0 míří vodorovně od nás, rovnoběžně se směrem šíření naší vlny. Lineárně polarizovaná vlna se rozloží na pravotočivou a levotočivou část (obr. 69b) a každá z nich se dál šíří jinou fázovou rychlostí, uvažujme $v_{fL} < v_{fR}$.

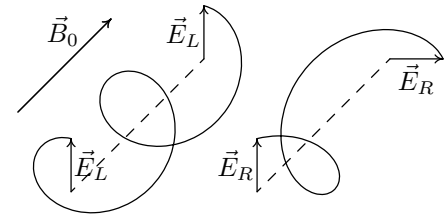
Z kapitoly 4.2 víme, že úhlová frekvence vlny se při vstupu vlny do jakéhokoli prostředí nezmění, a tak vektory \vec{E}_L a \vec{E}_R oběhnou za daný čas stejný počet otáček. V prostoru se ale pravotočivá vlna dostane dál než levotočivá, neboť $v_{fL} < v_{fR}$. Vektor \vec{E}_R tedy opisuje protáhlejší šroubovici než vektor \vec{E}_L .



obr. 69: Pootočení roviny polarizace

Plazma po čase končí a vlna se dostává zpět do izotropního prostředí, kde se obě části vlny šíří stejně rychle. Podívejme se na zjednodušující obrázek 70. Pomalejší levotočivé vlně se do délky plazmatu vešly celé dvě otáčky, pravotočivé pouze jedna a čtvrt. Za plazmatem vektory elektrických intenzit obou vln opět opisují stejně natažené šroubovice. Jejich složením vzniká lineárně polarizovaná vlna s rovinou polarizace odkloněnou o 45° od původního směru, obr. 69c a 69d.

Rovina polarizace vlny jdoucí rovnoběžně s magnetickým polem se při průchodu plazmatem stáčí. Kdybychom měli prostředí čtyřikrát delší oproti předchozímu příkladu, levotočivá vlna by stihla osm otáček a pravotočivá pět. Po průchodu by vektor \vec{E}_R ukazoval přímo nahoru jako \vec{E}_L a rovina polarizace by se ve výsledku nezměnila.



obr. 70: Odlišné šroubovice L-vlny a R-vlny v anizotropním prostředí

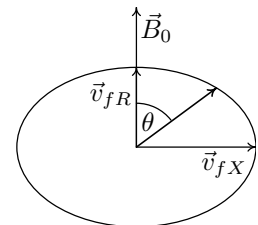
7.5 Vlny v libovolném směru

Pro popis elektromagnetické vlny šířící se obecným směrem v plazmatu s magnetickým polem jsou velmi důležité čtyři základní elektromagnetické vlny – řádná (značená O), mimořádná (X), pravotočivá (P) a levotočivá (L).

Bubliny

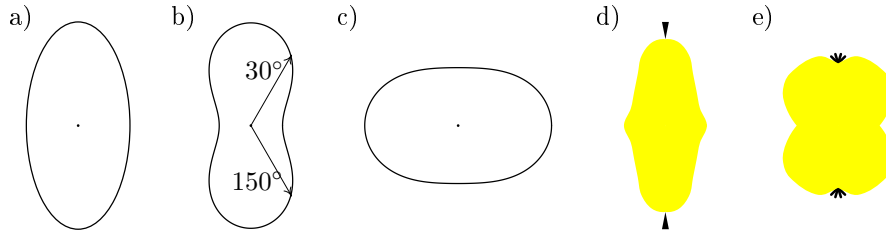
Mějme elektromagnetickou vlnu s takovou úhlovou frekvencí ω , se kterou se může naším plazmatem šířit pouze mimořádná vlna a pravotočivá. U řádné a levotočivé vlny spadá námi vybraná ω do zakázaného pásma. Předpokládejme ještě, že fázová rychlost pravotočivé vlny v_{fR} je v prostředí menší než fázová rychlost vlny mimořádné, $v_{fR} < v_{fX}$.

Vyšleme-li elektromagnetickou vlnu s ω pod obecným úhlem θ od vnějšího magnetického pole \vec{B}_0 , velikost její fázové rychlosti najdeme v diagramu z obrázku 71. Vzpomeňte si na kamarády



obr. 71: Diagram fázových rychlostí

běhající ve školce a křivku na obr. 22. Přesný tvar křivky („bubliny“) určuje prostředí a frekvence vlny. Další možné tvary bublin jsou na obr. 72a, 72b a 72c.



obr. 72: Možné tvary bublin

Vedle válcové symetrie bublin z výpočtů také plyne symetrie bublin podle roviny kolmé na osu z . Vlna šířící se pod úhlem 30° má vždy stejnou velikost fázové rychlosti jako vlna s $\theta = 150^\circ$. Proto křivkou popisující velikosti rychlostí nemůže být hruška (leda podivná dvojstopková nebo dvojbubáková z obrázků 72d a 72e).

Schematicky se bubliny zakreslují jako elipsy – neznamená to, že mají přesně eliptický tvar. Když elipsa stojí, rychlost v rovnoběžném směru s \vec{B}_0 je větší než v kolmém. V opačném případě elipsa leží – obr. 71, kde $v_{fR} < v_{fX}$.

Osmičky

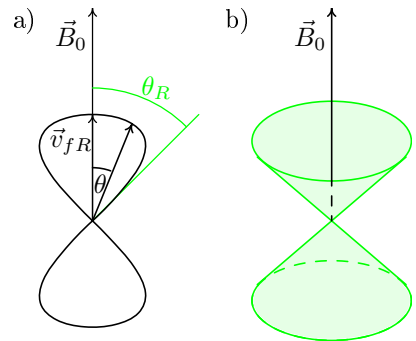
Tentokrát si vybereme takovou úhlovou frekvenci ω , která leží v zakázaném pásmu řádné, mimořádné i levotočivé vlny. Ze čtyř základních vln se pouze rovnoběžně s \vec{B}_0 může prostředím šířit pravotočivá vlna s fázovou rychlostí v_{fR} .

Pošleme-li vlnu o této úhlové frekvenci ω mírně šikmo vzhledem k magnetickému poli, vlna prostředím také bude procházet a její fázová rychlost bude obecně odlišná od v_{fR} . Pro více odkloněnou vlnu od magnetického pole se bude fázová rychlost vlny zmenšovat, obr. 73a.

Existuje úhel, kdy velikost fázové rychlosti klesne na nulu a nastane rezonance naší vlny s prostředím.

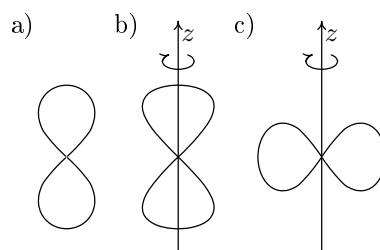
Tento úhel je v intervalu $(0^\circ, 90^\circ)$ jen jeden a nazývá se **rezonanční**. Vlna vyslaná pod větším úhlem než je rezonanční (až do 90°) se plazmatem nešíří.

V intervalu $(90^\circ, 180^\circ)$ také najdeme rezonanční úhel, který je díky symetrii podle roviny kolmé k \vec{B}_0 doplňkem do 180° k prvnímu rezonančnímu úhlu. Jelikož se pohybujeme v trojrozměrném prostředí, rezonanční směry v celém prostoru tak vytváří kuželovou plochu kolem osy z , jakou vidíme na obrázku 73b.



obr. 73: Diagram fázových rychlostí, rezonanční kužel

Diagram pro závislost velikosti fázové rychlosti v_{fR} na úhlu θ mezi směrem šíření vlny a magnetickým polem \vec{B}_0 pak vypadá jako osmička, obr. 74a. Prostorový diagram fázových rychlostí je zvláštní činka bez spojovací tyčky vzniklá otáčením osmičky kolem osy z , obr. 74b.



Kdybychom si zvolili úhlovou frekvenci ω , pro kterou by se mohla plazmatem šířit pouze mimořádná vlna (ve směru kolmém na \vec{B}_0), osmička by ležela, obr. 74c. Čím více by se směr šíření vlny přikláněl k magnetickému poli, úhel θ by se zmenšoval a tím by také klesala fázová rychlost vlny. V jistém momentě by dosáhla nuly. Pro menší úhly θ by se plazmatem nešířilo nic. Diagram velikostí fázových rychlostí v prostoru by vypadal jako podivná pneumatiku z obrázku 74c vzniklá otáčením ležící osmičky kolem z .

obr. 74: Možné tvary osmiček

Vlnové módy

Bublina z obrázku 71 (vzniklá z v_{fR} a v_{fX}) popisuje chování jedné vlny o dané frekvenci, když ji vyšleme pod různými úhly vzhledem k vnějšímu magnetickému poli. Šířeli se tato vlna přesně v rovnoběžném směru s \vec{B}_0 , je to vlna čistě pravotočivá s fázovou rychlostí v_{fR} . Ve směru kolmém na \vec{B}_0 půjde o vlnu mimořádnou s v_{fX} . Když vyšleme tuto vlnu pod obecným úhlem θ , až složitější výpočet by nám řekl, jak vlna přesně vypadá, neboli jak „běhá“ vektor její elektrické intenzity. Naše vlna nepůjde jednoduše rozložit na pravotočivou a mimořádnou složku, chová se složitěji.

Přestože se s úhlem θ mění „vnitřek“ naší vlny, stále jde o stejný typ, neboli o tentýž **vlnový mód**. Jednotlivé módy značíme podle toho, jak vypadají v rovnoběžném a kolmém směru vzhledem k vnějšímu magnetickému poli.

Bublina může charakterizovat čtyři různé vlnové módy, R-X, R-O, L-X a L-O. Případ pravotočivomimořádného módu R-X jsme si rozebrali, ostatní jsou analogické. Ve dvojici vln jednoho vlnového módu je tedy vždy jedna základní vlna z rovnoběžného směru s \vec{B}_0 a druhá ze směru kolmého k \vec{B}_0 . Vlnový mód O-X ani R-L nedává smysl.

Je-li diagramem stojící osmička, pak jde buď o R nebo L mód. Kolmo na magnetické pole se taková vlna nešíří, zaniká při rezonančním úhlu. Je-li diagramem ležatá osmička, prostředím se šíří řádný nebo mimořádný mód. Osmičkovému diagramu přísluší pouze jedna základní vlna, R, L, O nebo X.

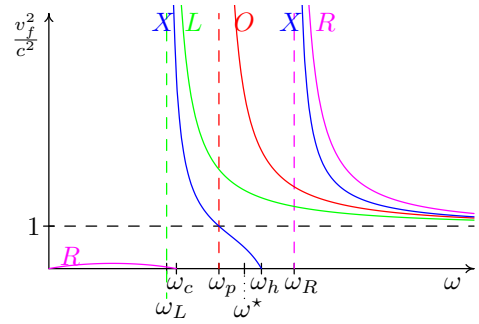
Vlastnosti módů

Nyní si uvedeme některé důležité závěry, které vyplývají z výpočtů elektromagnetických vln v plazmatu s vnějším magnetickým polem.

Omezíme se na vlny o jediné, avšak libovolné, úhlové frekvenci ω . Každým plazmatem se touto ω mohou šířit maximálně dva různé vlnové módy (žádný, jeden nebo dva). Pokud se šíří módy dva, velikosti jejich fázových rychlostí v_{f1} a v_{f2} jsou v každém směru navzájem odlišné; neboli neexistuje úhel θ , při kterém by platilo $v_{f1} = v_{f2}$.

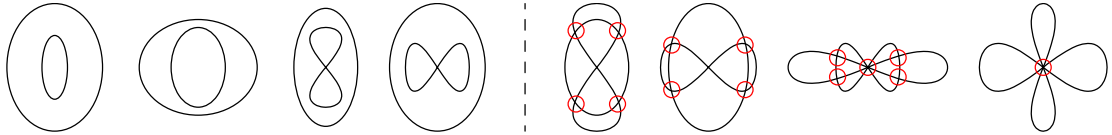
Vlnový mód se může objevit nebo zaniknout pouze na význačné úhlové frekvence ω_c , ω_p , ω_R , ω_L nebo ω_h , kde má některá ze základních vln mezní frekvenci nebo rezonanci. Například zaniká-li na ω_p řádná vlna, musí zde zaniknout i L-O mód.

Výše uvedené vlastnosti si můžeme alespoň zčásti ověřit na obrázku 75, kde jsou disperzní relace všech čtyř základních vln v jediném grafu¹². Vidíme, že jednotlivé vlny vznikají nebo zanikají pouze na význačných úhlových frekvencích. Žádné dvě křivky se nikde neprotínají, a tak vzájemné vztahy fázových rychlostí se v jednotlivých intervalech zachovávají. Například pro úhlovou frekvenci ω^* platí $v_{fX}^* < v_{fL}^* < v_{fO}^*$ a tento vztah platí také pro všechny úhlové frekvence z intervalu (ω_p, ω_h) .



obr. 75: Disperzní relace základních vln (pro případ $\omega_L < \omega_c < \omega_p$)

Jelikož se křivky jednotlivých vln neprotínou, nikdy nenastane rovnost fázových rychlostí dvou různých vln se stejnou ω . (Přesto u vysokých frekvencí uvažujeme fázovou rychlost všech vln rovnu c .)



obr. 76: Některé povolené a zakázané kombinace dvou módů

Důsledek: Schematickým diagramem, který popisuje rychlosti vlnových módů o dané úhlové frekvenci ω , může být: elipsa, osmička, dvě elipsy (jedna uvnitř druhé), osmička s elipsou (osma uvnitř) a nebo nic pro případ, kdy se prostředím s ω žádný mód nešíří. Ostatní varianty jsou zakázané, protože mají průsečík – dva různé módy by pak měly při nějakém úhlu θ stejnou fázovou rychlost, červeně označeno na obrázku 76. Více než dvě křivky také nejsou možné, neboť o stejné frekvenci se prostředím mohou šířit maximálně dva módy.

¹²Graf popisuje prostředí, kde $\omega_L < \omega_c < \omega_p$. Jednotlivé možnosti si více popíšeme v kapitole 7.6

7.6 Vytvoření CMA-diagramu

Graf, který nyní vytvoříme, popisuje chování všech vln v plazmatu s magnetickým polem. Tepelný (chaotický) pohyb částic prostředí zanedbáme. Volné elektrony se tedy pohybují pouze v důsledku působení nějakých polí. Hmotnost iontů oproti hmotnosti elektronů budeme brát za nekonečně velkou, a tak působící elektrické pole vlny s ionty nepohne.

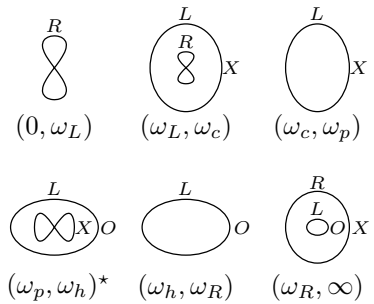
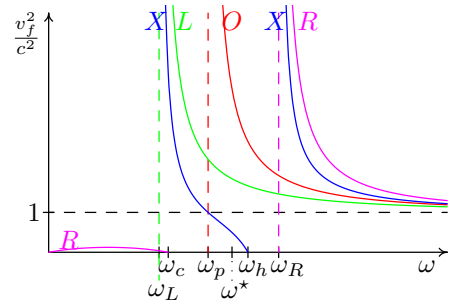
Z disperzních relací bubliny a osmičky

Vyjdeme z grafu disperzních relací čtyř základních vln na obrázku 77 nahoře a zaměříme se na vlny s ω^* . S touto úhlovou frekvencí se naším prostředím může šířit řádná, mimořádná a levotočivá vlna. Pro tři základní vlny potřebujeme osmičku a okolo ní bublinu (osma pro jednu vlnu a bublina pro dvě). Osmička musí ležet, protože v kolmém směru máme vlny dvě (O a X). Z důvodu $v_{fX} < v_{fO}$ osmička charakterizuje X mód.

Na bublinu zbyla levotočivá a řádná vlna (L-O mód) a jelikož $v_{fL} < v_{fO}$, bublina je položená, obr. 77 vlevo dole.

Ležatá bublina s ležatou osmičkou charakterizují nejen vlny o úhlové frekvenci ω^* , ale všechny vlny z intervalu $(\omega_p, \omega_h)^{13}$. Podobným způsobem se vytvoří schematické diagramy fázových rychlostí v každém ze šesti intervalů $(0, \omega_L)$ až (ω_R, ∞) .

V dalších kapitolách se budeme zabývat hlavně R-módem z intervalu nízkých úhlových frekvencí $(0, \omega_L)$.



obr. 77: Diagramy fázových rychlostí vytvořené z disperzních relací (pro případ $\omega_L < \omega_c < \omega_p$)

Osy CMA-diagramu

CMA-diagram¹⁴ tvoří jakýsi rám pro grafy fázových rychlostí jednotlivých vlnových módů. Nejdříve si popíšeme jeho trochu nezvyklé osy.

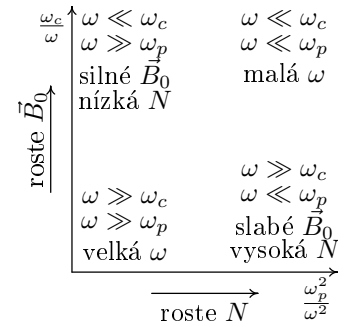
¹³Přesný tvar bubliny a osmičky se v průběhu intervalu mění. Bubliny se mohou různě nafukovat, osmičky mohou být více či méně baňaté. „Schematické zakreslení“ ale platí pro celý interval.

¹⁴Zkratka CMA je vytvořena z počátečních písmen jmen fyziků Clemmow, Mullaly, a Allis.

Na vodorovnou osu se nanáší podíl druhé mocniny plazmové frekvence ku druhé mocnině úhlové frekvence vlny, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$. Z rovnosti (41) $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ je zřejmé, že hodnota ω_p^2 je přímo úměrná hustotě plazmatu N . Omezíme-li se tedy na vlny o jediné úhlové frekvenci ω , tak růst vodorovné souřadnice odpovídá plazmatu s větším množstvím nabitých částic v 1 cm^3 . Naopak, zvolíme-li si plazma s danou hustotou plazmatu N , ω_p se nemění. Potom zvyšující se vodorovná souřadnice odpovídá vlnám s nižší frekvencí (ω je ve jmenovateli zlomku $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$). Hodnoty na vodorovné ose nemají jednotku, jsou bezrozměrné, $\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \approx \frac{s^{-2}}{s^{-2}}$.

Na svislou osu CMA-diagramu nanášíme poměr cyklotronové frekvence a úhlové frekvence vlny $\frac{\omega_c}{\omega}$. Hodnota ω_c je přímo úměrná velikosti vnějšího magnetického pole, vztah (49) $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$. Při pevné ω tak rostoucí svislá souřadnice odpovídá prostředí se silnějším magnetickým polem \vec{B}_0 . Omezíme-li se na jediné magnetické pole \vec{B}_0 , pak větší svislé souřadnice popisují vlny s menší frekvencí (i zde je ω ve jmenovateli zlomku $\frac{\omega_c}{\omega}$). Hodnoty na svislé ose jsou podobně jako na vodorovné bez jednotky.

Jinými slovy: V levém dolním rohu jsou vlny s vysokou úhlovou frekvencí, v protějším pravém horním naopak s nízkou. Pravý dolní roh odpovídá velmi hustému plazmatu, levý horní prostředí se silným vnějším magnetickým polem, obr. 78.



obr. 78: Osy a krajní případy CMA-diagramu

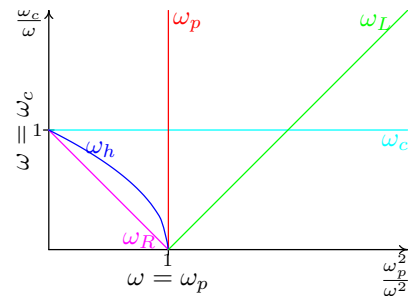
Hranice v CMA-diagramu

Barevné hranice v CMA-diagramu z obrázku 79 odpovídají význačným hodnotám úhlové frekvence, ω_p , ω_c , ω_L , ω_R a ω_h .

Červená hranice v CMA-diagramu odpovídá vlnám s úhlovou frekvencí rovnou plazmové frekvenci prostředí, $\omega = \omega_p$. Na vodorovné ose v CMA-diagramu přímka prochází jedničkou. Se svislou osou je hranice rovnoběžná, protože hodnota ω_p nezávisí na vnějším magnetickém poli a tudíž ani na hodnotě ω_c .

Podobně tyrkysová hranice. Ta prochází všemi body CMA-diagramu, kde je úhlová frekvence vlny rovna cyklotronové frekvenci, $\omega = \omega_c$. Na svislé ose protíná jedničku a je rovnoběžná s vodorovnou osou – hodnota ω_c není plazmatem ovlivněna, jen velikostí magnetického pole \vec{B}_0 .

Hodnoty ω_R , ω_L a ω_h jsou závislé na hustotě plazmatu N i velikosti \vec{B}_0 (na ω_p i ω_c). Hranice jimi vytvořené jsou křivky, jejichž přesný tvar je určen vzorci, které



obr. 79: Hranice CMA-diagramu

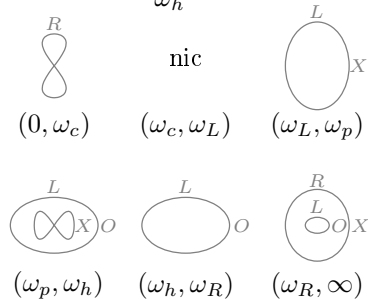
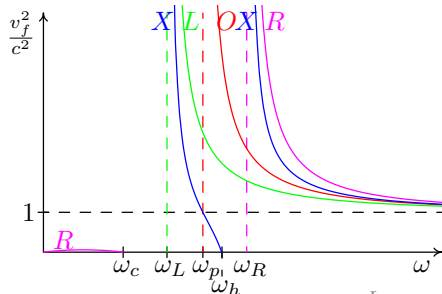
jsme si ukazovali jen pod čarou v zápatí. (Modrou hranici tvoří část paraboly, růžová a zelená čára jsou části přímek.)

Oblasti v CMA-diagramu

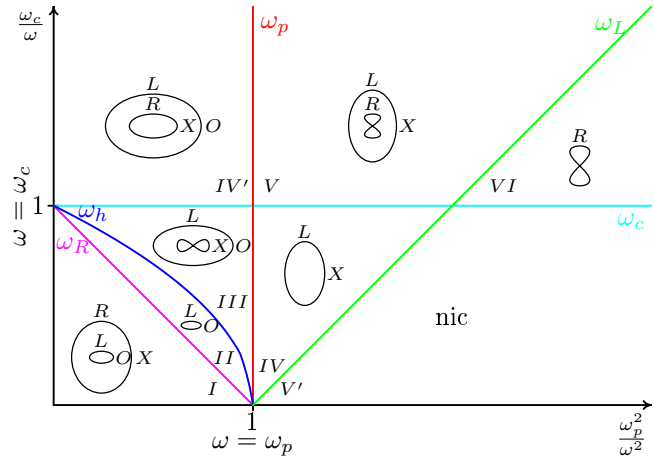
Jednotlivé oblasti CMA-diagramu odpovídají intervalům úhlových frekvencí z obrázku 77. Každému poli tak přísluší jeden diagram vlnových módů (diagram se může změnit pouze na hranici).

Podívejme se na úzkou oblast označenou *II* v obrázku 80. Toto pole odpovídá intervalu (ω_h, ω_R) na grafu 77, kde se šíří L-O mód s $v_{fL} < v_{fO}$. Oblast i interval jsou ohraničené hodnotami ω_h a ω_R . Pohybujeme-li se od nízké modré ω_h k vyšší růžové ω_R , bublina se zmenšuje – hodnoty v_{fL} a v_{fO} v grafu 77 klesají.

Překročíme-li růžovou hranici ω_R v grafu 77 i v CMA-digramu, objeví se okolo L-O bubliny druhá obrovská bublina popisující mód R-X. Růžová hodnota ω_R je mezní frekvencí řádné a pravotočivé vlny, a tedy $v_{fR} \rightarrow \infty$, $v_{fX} \rightarrow \infty$. Dále s rostoucí ω se obě bubliny zmenšují, pro velmi vysoké ω se z nich skoro stanou kružnice s poloměrem c .



obr. 81: Grafy pro případ $\omega_c < \omega_L$



obr. 80: CMA-diagram

Podobným způsobem můžeme pomocí obrázku 77 namalovat diagramy fázových rychlostí příslušné šesti intervalům do šesti oblastí CMA-diagramu (označených *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* a *VI*). Pole *IV'* a *V'* zůstanou nezaplňená.

Graf 77, ze kterého jsme vyplnili část CMA-diagramu, popisuje situaci, kdy ω_L je nejmenší ze všech pěti významných úhlových frekvencí. Při vhodné volbě prostředí – velmi slabé pole \vec{B}_0 v hustším plazmatu – se stane, že hodnota ω_L převyšuje ω_c . Graf fázových rychlostí pro takový případ je na obrázku 81. Všimněme si, že křivky jednotlivých základních vln se vůči významným ω chovají stejně (například mimořádná vlna má stále mezní frekvence na ω_L a ω_R a rezonanci na ω_h). Změna

je pouze v pořadí těchto hodnot.

Oproti grafu 77 se graf 81 liší jen ve druhém intervalu (ω_c, ω_L) namísto (ω_L, ω_c) . Tímto intervalem neprochází funkce žádné ze základních vln, a tak se žádný vlnový mód prostředím nešíří – plazma je příliš husté (vysoká ω_p) a magnetické pole příliš slabé (nízká ω_c). Políčko V' v CMA-diagramu bude prázdné.

Zbývá vyplnit poslední oblast označenou IV' . Doposud jsme předpokládali prostředí „hustšího plazmatu se slabším magnetickým polem“, přesněji prostředí, kde $\omega_p > \omega_c$. Existuje samozřejmě prostředí, ve kterém platí opačná nerovnost $\omega_p < \omega_c$ (neboli „řidší plazma se silnějším magnetickým polem“).

Graf disperzních relací pro případ $\omega_p < \omega_c$ je na obrázku 82. Všimněme si opět, vztahy funkcí jsou vůči význačným hodnotám ω stále stejné, změnilo se pořadí hodnot. Oproti grafu 77 se graf 82 liší pouze ve třetím intervalu (ω_p, ω_c) namísto (ω_c, ω_p) . Vidíme, že intervalem (ω_p, ω_c) prochází všechny funkce základních vln. Prostředím se tedy mohou šířit dva vlnové módy (R-X a L-O), jejich fázové rychlosti popisují dvě bubliny, černě na obrázku 82, šedě jsou stejné jako na 77.

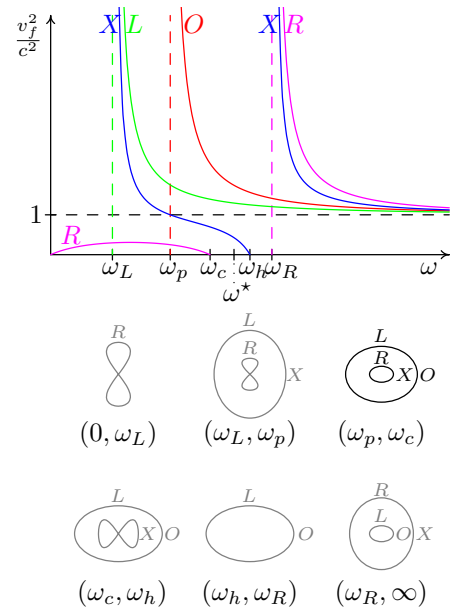
Zaměříme se nyní na úhlovou frekvenci ω^* . Posunujeme-li se od ω^* k nižším úhlovým frekvencím, v grafu 77 narazíme na ω_p . V CMA-diagramu tomu odpovídá překročení červené hranice z oblasti III do oblasti IV . Pohybujeme-li se stejně v grafu 82, nejdříve dojdeme k hodnotě ω_c , v CMA-diagramu se tak přes tyrkysovou hranici ω_c dostáváme do oblasti IV' .

Cesta I, II, III, IV, V, VI CMA-diagramem odpovídá posouvání ω od obrovských hodnot až k nule v grafu 77. Jsme-li v grafu 81 (husté plazma, slabé \vec{B}_0), namísto políčka V cesta obsahuje V' . Máme-li naopak řídké plazma se silnějším magnetickým polem, které popisuje 82, CMA-diagramem projdeme přes oblast IV' .

CMA-diagram zachycuje chování všech vln ve všech možných prostředích.

7.7 Složitější CMA-diagram

Při tvorbě CMA-diagramu v předchozí kapitole jsme uvažovali nejjednodušší model plazmatického prostředí – studené plazma s nehybnými ionty. Připustíme-li pohyb iontů, disperzní relace základních vln se zesložití (například o změně u levotočivé vlny jsme se už zmínili). V grafech se vedle dosavadních význačných úhlových frek-



obr. 82: Grafy pro případ $\omega_p < \omega_c$

venci objeví nové a ty v CMA-diagramu vytvoří další hranice. CMA-diagram se tak rozšíří.

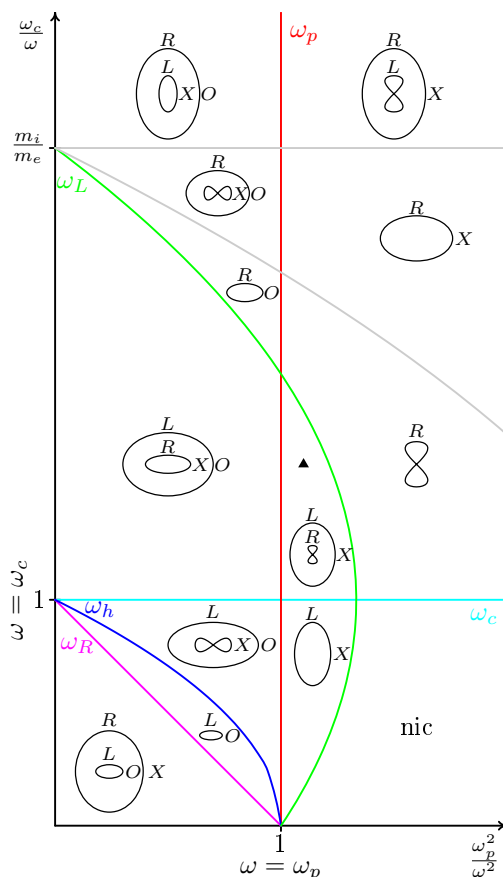
Na obrázku 83 takový rozšířený CMA-diagram vidíme. Z dosavadních barevných hranic se změnila jen zelená – zahrnula a protíná svislou osu v bodě daném poměrem hmotností iontu a elektronu (u vodíkového plazmatu je poměr 1840). Dále přibyly dvě šedé hranice a počet oblastí vzrostl na třináct.

Uvažujeme-li plazma s dvěma typy pohyblivých kladných iontů, třeba s vodíkem H^+ a kyslíkem O^+ , příslušný CMA-diagram se ještě rozšíří. Například k cyklotronovým frekvencím elektronů a vodíkových iontů přibude cyklotronová frekvence kyslíku. Odpovídající CMA-diagram obsahuje ještě více hranic a ještě více oblastí. Takový graf se stává příliš nepřehledným.

Použití CMA-diagramu

Nejdříve si zvolíme prostředí, tzn. hustotu plazmatu N a velikost vnějšího magnetického pole $|\vec{B}_0|$. Dle vztahů (41) $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ a (49) $\omega_c = \frac{eB_0}{m_e}$ spočítáme hodnoty plazmové a cyklotronové frekvence, ω_p a ω_c . Nyní si zvolíme úhlovou frekvenci ω zkoumané vlny. Vypočítáme vodorovnou $\frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ a svislou souřadnici $\frac{\omega_c}{\omega}$ vlny v CMA-diagramu. Obrázek v políčku, do kterého bod o těchto souřadnicích padne, popisuje chování naší vlny v prostředí, které jsme si zadali. (Pokud bod padne přímo na nějakou hranici, trefili jsme se do mezní frekvence nebo rezonance nějaké vlny.)

Například padne-li naše vlna do CMA-diagramu na místo černého trojúhelníčku, hned vidíme, že ve směru rovnoběžném s magnetickým polem \vec{B}_0 se vlna rozdělí na pravotočivou a levotočivou část. Levotočivá se bude šířit větší fázovou rychlostí. Když budeme vlnu od magnetického pole odklánět, pravotočivá vymizí, prostředím se už nemůže šířit. Levotočivá vlna se bude postupně přeměňovat na mimořádnou, která má menší fázovou rychlost než levotočivá.



obr. 83: CMA-diagram

8 Prostředí okolo Země

Na chování vln v okolí Země má zásadní vliv složení vrstev atmosféry a magnetické pole Země.

8.1 Ionosféra a jiné sféry

Atmosféru Země můžeme dělit na vrstvy podle různých kritérií. Určitě jste se setkali s rozdělením podle teploty na troposféru, stratosféru, mezosféru, termosféru a exosféru.

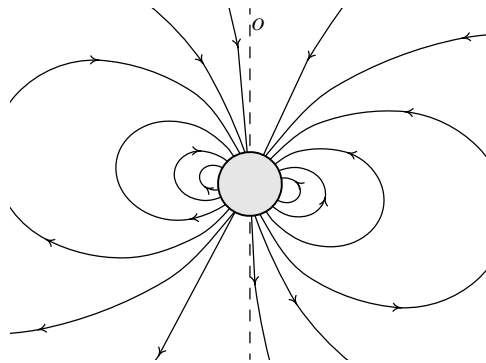
Pro nás bude důležité dělení pouze na dvě vrstvy, na **neutrosféru** a **ionosféru**. V nižší neutrosféře je plyn už dle názvu vesměs neutrální. Z kapitoly o ionizovaném plynu víme, že každý plyn je trochu ionizovaný, ovšem pokud je míra ionizace příliš nízká, na chování plynu se neprojeví.

Ionosféra tvoří plynulý předěl mezi neutrálním prostředím na Zemi a plazmatickým prostředím ve vesmíru. Nachází se přibližně ve výšce 60 až 550 km nad zemským povrchem. Hranice samozřejmě nejsou ostré, stupeň ionizace s rostoucí výškou postupně roste. Přibližně od 60 km je ionizace plynu dostatečná, že zde mohou být některé elektromagnetické vlny absorbovány, jiné se mohou od ionosféry odrážet – a to jak vlny od Země zpět k Zemi, tak i z vesmíru do vesmíru.

8.2 Magnetické pole Země

Na obrázku 84 vidíme magnetickými indukčními čarami znázorněné **magnetické pole Země**. Vytváří jej vnější tekuté jádro Země v hloubce 3000 až 5000 km pod zemským povrchem, které je tvořeno hlavně kovovými prvky železem a niklem. Tekutina v jádře se pohybuje, uvnitř jádra tečou elektrické proudy, a ty kolem sebe vytvářejí magnetické pole.

Tvar pole z obrázku 84 je stejný, jaké kolem sebe vytváří tyčový magnet, tzv. dipólové pole. Osa magnetického pole Země je od zeměpisné osy odkloněna přibližně o 10° a je také opačně orientovaná. Magnetické indukční čáry tedy „vytékají“ z jižní polokoule a „noří“ se do severní.



obr. 84: Magnetické pole Země

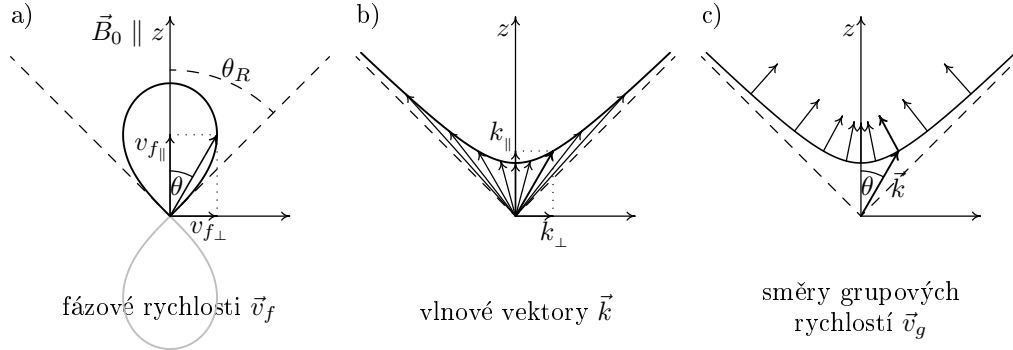
9 Hvizdový mód

V úvodu textu jsme se o hvizdech zmínili, v této kapitole si je vysvětlíme a některé typy si ukážeme na naměřených datech. Hvizdový mód se týká elektromagnetických vln s velmi nízkými frekvencemi. V CMA-diagramu na obrázku 83 jde ve velké většině případů o oblast se stojící osmičkou charakterizující R-mód (vpravo od zelené a nahoře od bledě modré hranice).

9.1 Fázová a grupová rychlost vln hvizdového módu

Zvolme si vlnu o jedné konkrétní úhlové frekvenci ω , která spadá do hvizdového módu. Křivka na obrázku 85a ukazuje, jakými fázovými rychlostmi se tato vlna bude šířit v různých směrech. Jde o osmičku, ovšem v tomto případě je křivka přesná, už to není jen schematický obrázek. Na osách najdeme složky fázové rychlosti naší vlny ($v_{f\parallel}$ do směru rovnoběžného s \vec{B}_0 a $v_{f\perp}$ do směru kolmého), když ji vyšleme pod úhlem θ vůči magnetickému poli \vec{B}_0 .

Z osmičky si pomocí vztahu (32) $|\vec{k}| = \frac{\omega}{|\vec{v}_f|}$ vytvoříme graf, který popisuje závislost velikosti vlnového vektoru $|\vec{k}|$ na směru šíření vlny. Úhlová frekvence ve vztahu (32) je konstanta, kterou jsme si zvolili na počátku. Vztah mezi $|\vec{v}_f|$ a $|\vec{k}|$ je nepřímo úměrný (tam, kde je vektor \vec{v}_f dlouhý, je \vec{k} krátký, a naopak).

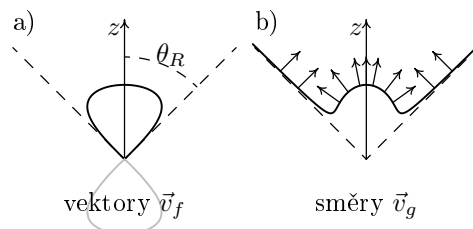


obr. 85: Grafy potřebné k určení směru grupové rychlosti hvizdového módu

Přesný graf velikostí \vec{k} připadající různým směrům vidíme na obrázku 85b. Ve směru rovnoběžném s \vec{B}_0 odpovídá naší vlně krátký vektor \vec{k} , protože v osmičce, při $\theta = 0$, je velikost \vec{v}_f velká. Odkláňáme-li se od \vec{B}_0 , vektor fázové rychlosti \vec{v}_f se zkracuje, a tudíž vektor \vec{k} ve vedlejším grafu postupně prodlužuje. V těsné blízkosti rezonančního úhlu je \vec{v}_f téměř nulová, délka vlnového vektoru \vec{k} se zde blíží k nekonečným hodnotám. Pod úhly většími než je rezonanční úhel se námi vybraná vlna šířit nemůže. Na osách grafu najdeme příslušné složky vlnového vektoru k_{\parallel} a k_{\perp} .

Nyní si připomeňme závěr kapitoly 4.12: máme-li graf popisující délku vlnového vektoru \vec{k} v závislosti na směru šíření (pro fixní ω), pak příslušný vektor grupové rychlosti směřuje kolmo ke křivce grafu, obr. 37b. Grupové rychlosti odpovídající různým úhlům θ tak vytvoří na křivce „chlupy“. Jejich délky řešit nebudeme. Směry grupových rychlostí vytvoříme na křivce 85b, výsledek je na 85c.

Na obrázku 85 vidíme, že pro malé úhly θ vektor grupové rychlosti \vec{v}_g směřuje téměř podél magnetického pole \vec{B}_0 . Informace o vlně jde s \vec{B}_0 . Pro úhly z blízkosti rezonančního úhlu, se vektor grupové rychlosti \vec{v}_g od magnetického pole znatelně odklání, informace o vlně se šíří šikmo vůči \vec{B}_0 .



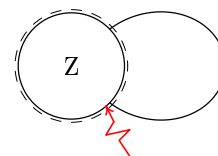
obr. 86: Nízké f hvizdového módu

Zaměřili jsme se na jednu frekvenci z pásma odpovídající hvizdovému módu. Kdybychom zvolili frekvenci nižší, její osmička by byla shora a zespodu spláclá (obr. 86a). Graf velikostí vlnových vektorů by potom měl uprostřed „bouli“, jakou vidíme na obrázku 86b. I pro takový tvar grafu ovšem platí text z předchozího odstavce.

9.2 Hvizdy

V jižní Africe udeří blesk. Obrovské napětí mezi záporně nabitým mrakem a neutrálním povrchem Země prorazí vrstvu vzduchu – velké množství elektronů se během krátkého času přesune z mraku do Země, mezi mrakem a Zemí tak na okamžik teče velký elektrický proud. Tento proud a prudký pokles napětí mezi mrakem a Zemí způsobí vznik elektromagnetických vln. Při změně elektrického pole vzniká pole magnetické a měnící se elektrické pole spolu s měnícím se magnetickým vytváří elektromagnetickou vlnu. V okamžiku úderu blesku je tedy do všech směrů vyslána řada elektromagnetických vln s různými frekvencemi.

Zaměříme se na vlny šířící se přímo pryč od Země. Ty prochází vrstvami atmosféry, ionosférou do plazmatického prostředí, kde je jejich chování ovlivňováno volnými nabitými částicemi a také magnetickým polem Země. Budeme uvažovat pouze vlny hvizdového módu (R-módu) s frekvencemi v řádu kHz¹⁵. Do plazmatického prostředí se dostanou jen pravotočivé části vln, ostatní se od plazmatu odrazí zpět k zemskému povrchu, kde jsou postupně absorbovány.

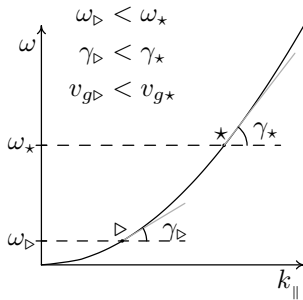


obr. 87: Bouřka a magnetická indukční čára

Pravotočivé vlny stoupající od Země postupují podél magnetické indukční čáry zakreslené na obrázku 87 (čárkovaně je zakreslena iono-

¹⁵Proč nebereme v úvahu také vyšší frekvence (třeba viditelné světlo) se dozvíme dále.

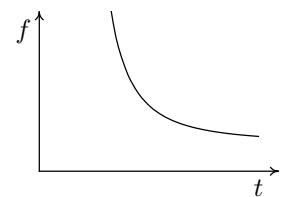
sféra, blesk je přibližně $10\,000\times$ zvětšený). Vektory fázových i grupových rychlostí jsou téměř rovnoběžné s \vec{B}_0 (malé úhly θ na obrázcích 85c a 85b). I když se čára začne více stáčet, vlny jí budou stále následovat – ve směru magnetického pole si můžeme představit jakési „trubičky“ s odlišnou hustotou oproti okolnímu prostředí. Vlny jsou drženy v těchto trubičkách, které je přivedou zpět k Zemi do střední Evropy.



obr. 88: Závislost ω na $k_{||}$ pro nízké frekvence

Na obrázku 88 vidíme, jak závisí úhlová frekvence vlny ω na vlnovém čísle $k_{||}$ pro frekvence v řádu kHz. Z tohoto grafu vyčteme grupovou rychlost podél magnetického pole – \vec{v}_g je téměř rovnoběžná s \vec{B}_0 , její ostatní složky jsou malinké a nemusíme je uvažovat. Velikost grupové rychlosti je pro vlnu s úhlovou frekvencí ω definovaná jako sklon křivky grafu ve výšce ω (vztah (34) $v_{g||} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_{||}}$). Vidíme, že čím větší úhlová frekvence (čím jsme v grafu výš), tím křivka více stoupá a tudíž roste grupová rychlost vlny. Jinými slovy, vyšší frekvence mají větší rychlost a z Afriky do Evropy dorazí dříve než frekvence nízké.

Signál, který je složený z řady vln a který vznikl úderem blesku v jediném okamžiku, se během cesty podél čáry magnetické indukce v čase roztáhne – vznikne **hvizd** (angl. whistler). Doba mezi příchodem rychlých a pomalých vln z jediného blesku je přibližně 1 s. Graf hvizdu vidíme na obrázku 89. Na vodorovné ose je čas a na svislé frekvence. Nejdříve uslyšíme vysoké tóny, s postupem času stále nižší a nižší až zvuk zanikne.



obr. 89: Hvizd

Vyšší frekvence

Blesk je zdrojem také elektromagnetických vln s daleko vyššími frekvencemi, nejen v řádu kHz. Mimo jiné vln z oblasti viditelného světla – blesk vidíme. I kdybychom ale takové vlny „chytili“ podobně jako hvizdové, nic bychom z reproduktoru nesly-

šeli, jejich frekvence by byla pro naše uši příliš vysoká. Viditelnému světlu přísluší frekvence v řádu 10^{11} kHz, naše ucho zvládne maximálně 20 kHz.

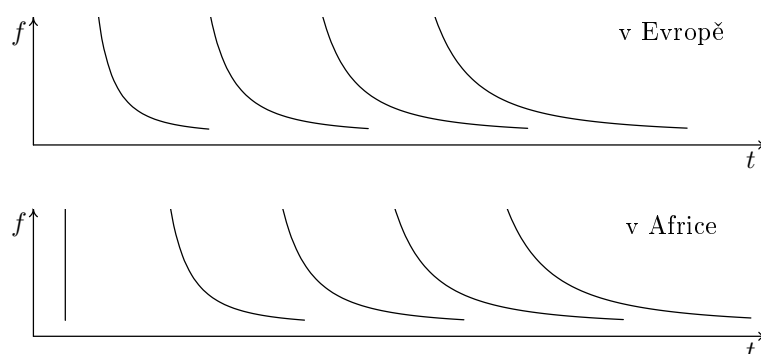
Více hvizdů

Občas se hvizdy nevyskytují samostatně, ale ve skupinách řazeny za sebe, jak ukazují grafy na obrázku 88 (všechny hvizdy na obrázku vytvořil jeden blesk). První křivka na grafu *v Evropě* odpovídá hvizdu, jaký jsme si popsali výše, zbylé si vysvětlíme nyní.

Blíží-li se elektromagnetické vlny podél magnetické indukční čáry k severní polokouli Země, část energie vln se odrazí od vrchní vrstvy ionosféry (na obrázku 87 čárkovaně) a vrací se podél siločáry zpět nad jižní Afriku. Tam se také odrazí. Když se vlny napodruhé dostanou nad Evropu, pronikají do ionosféry a se zpožděním dvou cest za prvním hvizdem jsou zde zaznamenány jako druhý hvizd.

Druhý hvizd trvá déle než první. Místo jedné cesty po siločáře měly rychlejší vlny tři cesty na to, aby si vytvořili větší náskok před vlnami pomalými. Hvizd je tedy více natažený, slyšíme ho déle.

Vícenásobnými odrazy od ionosféry vznikají také další hvizdy (třetí, čtvrtý...). Jejich intenzita postupně klesá, až ji naše přístroje nedokážou zaznamenat. Každý hvizd je vždy delší než hvizd předcházející.



obr. 90: Hvizdy z jednoho jihoafrického blesku naměřené ve střední Evropě a v jižní Africe

Díky odrazům od vnější vrstvy ionosféry se hvizdy objevují také v blízkosti bouřky (i několik set kilometrů od místa úderu blesku). Graf hvizdů naměřených na stejné polokouli, kde je bouřka, vidíme na obrázku 90 *v Africe*.

Nejdříve uslyšíme ránu, všechny frekvence v jediném čase (na obrázku svislá čára). Ránu vytvoří vlny, které se k nám dostanou vzduchem podél zemského povrchu. Takové vlny se v čase neroztáhnou, protože se všechny šíří izotropním prostředím pod ionosférou stejnou grupovou rychlostí.

Po ráně uslyšíme hvizd, který vznikl dvěma cestami podél magnetického pole, nad Evropu a zpět. Další hvizd je delší než předcházející. Vlny, které ho tvoří, proběhly magnetickou indukční čarou čtyřikrát – ty rychlé více utekly vlnám pomalým.

Výskyt hvizdů

Z předchozího je jasné, že na Zemi můžeme hvizdy naměřit v blízkosti bouřky nebo v místě s ním spojeném magnetickou indukční čarou. Výskyt hvizdů je proměnlivý, tak jako je proměnlivý výskyt bouřek. Noční doba je pro hvizdy vhodnější, neboť ionosféra v noci vlny méně absorbuje.

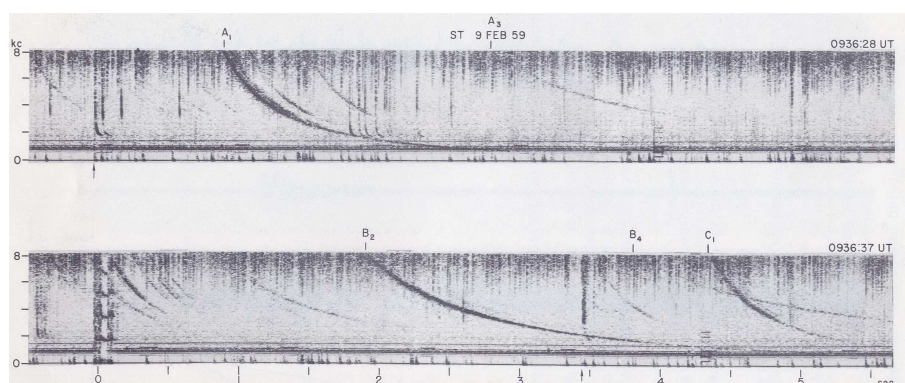
Hvizdy nejlépe naměříme na středních zeměpisných šířkách. V oblasti rovníku nejsou vůbec, protože zde chybí vstupující nebo vystupující magnetické indukční čáry (obr. 84). Na vysokých šířkách se hvizdy mohou objevit jen velmi slabé – magnetické indukční čáry spojující příslušná místa jsou příliš dlouhé.

9.3 Hvizdy naměřené na Zemi

V této kapitole si ukážeme různé typy hvizdů naměřené na Zemi koncem 50. let 20. století. Novější data hvizdů pochází převážně z družic. Ve všech grafech hvizdů (nejen v této kapitole) je na vodorovné ose čas (tentokrát v sekundách) a na svislou osu nanášíme frekvenci vlny v kHz; stará anglická zkratka kc značí kilocycles, $kc = kHz$.

Více hvizdů z jednoho blesku

Data z horního grafu na obrázku 91 byly naměřeny ve Stanfordu v Kalifornii v roce 1959, spodní graf je z téže doby z místa v Tichém oceánu, které je se Stanfordinem spojeno čarou magnetické indukce. Hvizdy označené písmeny *A* a *B* vznikly z jediného blesku bouřky v Tichém oceánu na jižní polokouli.

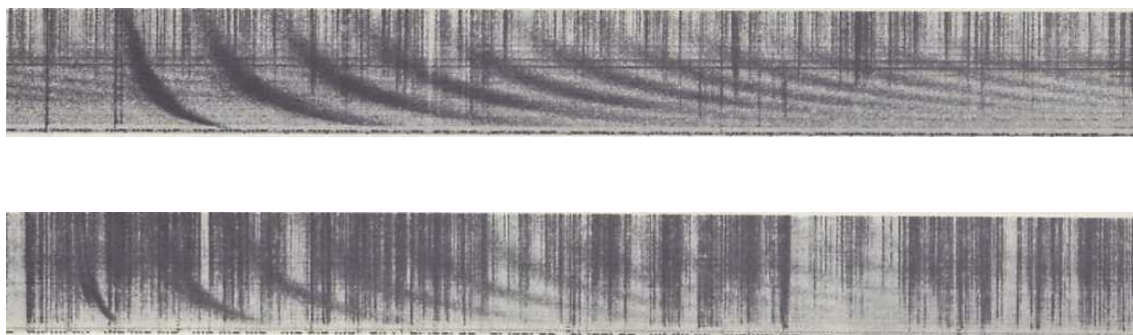


obr. 91: Hvizdy A_1 , A_3 , B_2 a B_4 vznikly z jediného blesku; převzato z [6]

Křivka označená A_1 odpovídá prvnímu hvizdu, který z blesku do Kalifornie přišel. Slabý a také delší hvizd A_3 prošel čáru magnetické indukce celkem třikrát (z jižní polokoule nad Kalifornii, zpět nad Tichý oceán a ještě do Kalifornie).

Na spodní části křivka B_2 přísluší „dvojcestnému“ hvizdu (nad Stanford a zpět na jižní polokouli) a slabounký B_4 odpovídá čtyřem cestám podél čáry magnetické indukce. Hvizdy jsou dlouhé v řádu sekund, například B_2 hvízdal přibližně 2 s.

Hvizd označený C_1 naměřený v Tichém oceánu je obyčejný jednocestný hvizd z bouřky v Americe na severní polokouli. Onehdy se tedy blýskalo na obou místech.

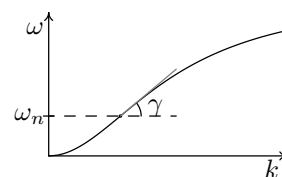


obr. 92: Více hvizdů z jednoho blesku; převzato z [6]

Na horním obrázku 92 vidíme hvizdy z jediného blesku naměřené v blízkosti bouřky na Novém Zélandu v roce 1958 (sudé počty cest podél čáry magnetické indukce). Liché hvizdy z téhož blesku byly naměřeny v Seattlu, spodní část obrázku 92. Tmavé svislé čáry odpovídají řadě blesků, jejichž signály se neroztáhly, protože se nešířily anizotropním plazmatickým prostředím kolem Země, ale pouze izotropním vzduchem pod ionosférou. Délka záznamů odpovídá přibližně třiceti sekundám.

„Nosové“ hvizdy

V kapitole 9.2 o vzniku hvizdu jsme si řekli, že když se šíří vlny o nízkých frekvencích podél čáry magnetické indukce na opačnou polokouli Země, tak čím vyšší frekvence vlny, tím rychleji cestu proběhnou. Toto ovšem platí jen do jisté míry. Překročíme-li s frekvencí vlny jistou mez, grupová rychlost už s rostoucí frekvencí neporoste, naopak začne klesat. Sklon křivky v grafu 93 odpovídá složce grupové rychlosti ve směru \vec{B}_0 . Vidíme, že nejdříve sklon roste (až k hodnotě ω_n) a potom začne klesat¹⁶. Frekvence $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$, se v angličtině nazývá **nose frequency**. Této

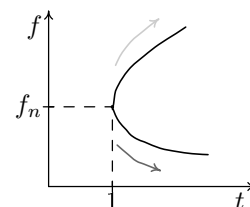


obr. 93: Disp. relace

¹⁶Graf 88 z kapitoly 9.2 je výřezem grafu 93. Grafy mají na osách různá měřítka.

frekvenci (resp. úhlové frekvenci) odpovídá největší sklon v celém grafu (největší γ), a tak vlna s f_n projde cestu nejrychleji.

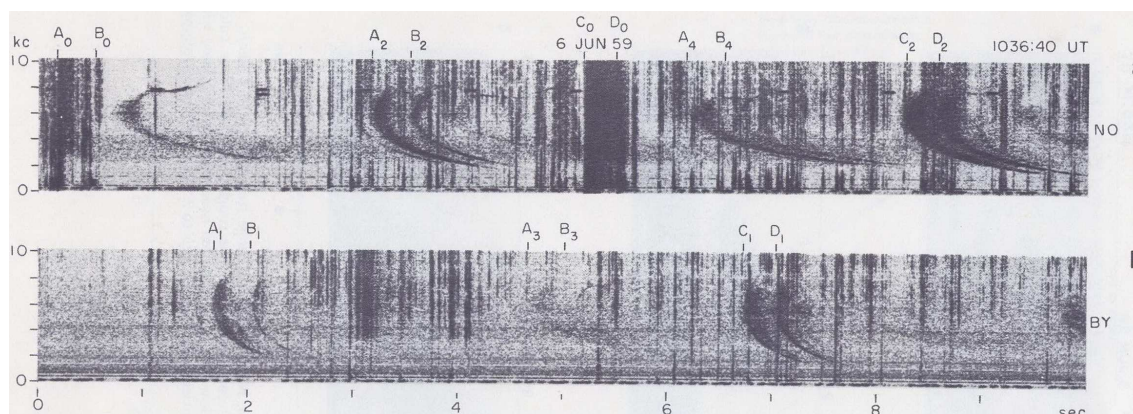
Na obrázku 94 vidíme jeden „nosový“ hvizd. Na vodorovné ose je ubíhající čas a na svislé jsou frekvence naměřených elektromagnetických vln. V čase 1 s jsme zaznamenaly nejrychlejší nosovou frekvenci f_n , v průběhu času k nám postupně docházejí jak nižší a nižší frekvence (spodní část hvizdu označená tmavou šipkou), tak i vyšší a vyšší (horní část hvizdu s světlou šikou). Tvar grafu připomíná profil nosu, nejrychlejší frekvence f_n je pak na jeho špičce.



obr. 94: Nosový hvizd

Nosová frekvence závisí na prostředí, kterým se vlny šířily – na magnetickém poli Země a hustotě plazmatu kolem ní. Měření nosové frekvence je jednou z metod, jak ze Země určit hustotu plazmatu (počet nabitých částic v daném objemu), když známe magnetické pole.

Na obrázku 95 jsou nosové hvizdy naměřené v roce 1959 v Norwichi ve Vermontu a na stanici v Antarktidě. Horní obrázek je z Norwiche, kde byla bouřka a udeřily zde čtyři blesky *A*, *B*, *C* a *D*. Svislé čáry označené indexy 0, odpovídají naměření všech frekvencí naráz (vlny prošly pouze izotropním vzduchem všechny stejně rychle).

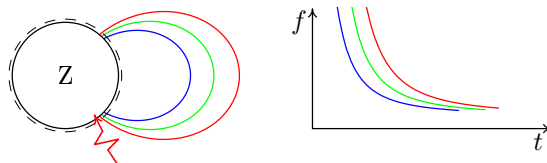


obr. 95: Naměřené hvizdy tvaru nosu, každé písmeno patří jednomu blesku; převzato z [6]

Na spodním obrázku najdeme A_1 , B_1 , C_1 a D_1 , které popisují jednocestné hvizdy z Vermontu na jižní polokouli podél čáry magnetické indukce. Hvizdy s indexy 2 na horním obrázku odpovídají dvoucestným hvizdům ze severní polokoule na jižní a zpět. Další hvizdy jsou značeny analogicky indexy 3 a 4. Všechny hvizdy na obrázku 95 mají tvar nosu. Nosovou frekvenci odečteme z grafu, je přibližně rovna 6 kHz (6 kc).

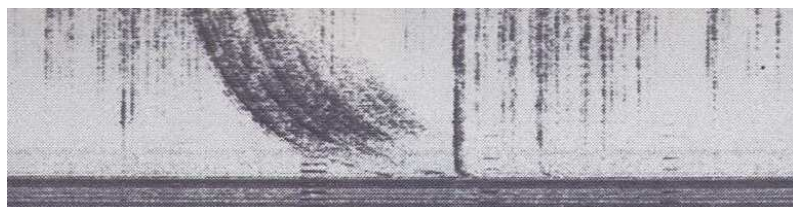
Jeden hvizd různými cestami

Elektromagnetické vlny z jednoho blesku se na opačnou polokouli mohou dostat různými cestami. Všechny vlny se nemusí indukční čáry „chytit“ přímo nad úderem blesku, některé se mohou vzduchem dostat kousek od místa bouřky a teprve tam projít ionosférou a šířit se dál podél \vec{B}_0 .



obr. 96: Různé trasy a příslušné hvizdy

Na obrázku 96 jsou namalované tři různé trasy plazmatickým prostředím. Nejkratší a tudíž nejrychlejší je modrá trasa, o něco delší je zelená a nejdelší červená. Hned vedle vidíme záznam hvizdů, jaký bychom naměřili na severní polokouli.



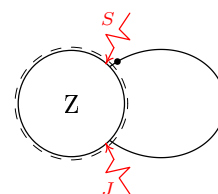
obr. 97: Jednocestné hvizdy z blesku, které přišly podél různých čar magn. indukce; převzato z [6]

Hvizdy z obrázku 97 byly naměřeny na Aljašce v roce 1958. První, trošku silnější křivka odpovídá vlnám, které prošly z jižní polokoule skrz plazma nejkratší cestou. Další, postupně slabší křivky, odpovídají cestám podél delších a delších čar magnetické indukce. Všechny jsou „jednocestné“.

9.4 Hvizdy z družic

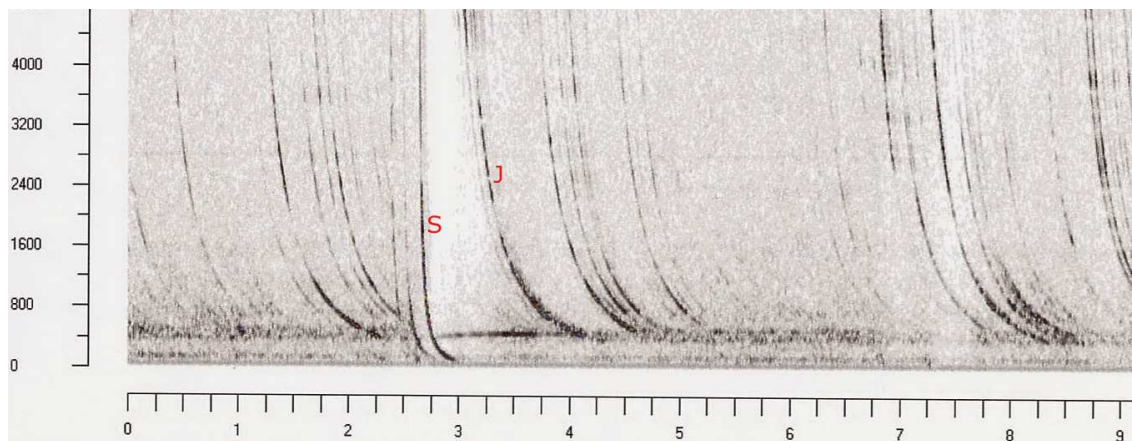
Ukážeme si hvizdy naměřené v roce 1972 sovětskou družicí Interkosmos 5 a jeden graf z české družice Magion 5 z roku 1999. Stará data z Interkosmu byla do grafů, které uvidíme, zpracována až v devadesátých letech (v době dostatečně výkonných počítačů a potřebných programů). Také si popíšeme jeden typ hvizdu, který na Zemi nelze naměřit.

Družice Interkosmos 5 měřila přibližně ve výšce 1000 km nad severní polokoulí na zeměpisných šířkách kolem 45° (družice je tečka na obrázku 98). Naměřená data jsou zpracována do grafů, jako v předchozí části – na vodorovné ose je čas v sekundách, na svislé frekvence v hertzech a čím tmavší šedá, tím intenzivnější vlny.



obr. 98: Interkosmos 5

Na záznamu 99 vidíme jeden silný, velice krátký hvizd (označený *S*), ve kterém se roztáhly jen frekvence nižší než 400 Hz. Tento hvizd vznikl z blesku na severní polokouli v blízkosti družice, obr. 98. Vlny prošly anizotropní ionosférou a hned narazily na družici, která je zaznamenala – na roztažení měly málo času. Delší hvizdy z obrázku (*J* i další) dorazily ke družici z blesků na jižní polokouli. Za ionosférou



obr. 99: Více a méně natažený hvizd z družice Interkosmos 5

prošly téměř celou čáru magnetické indukce, a tak se roztáhly daleko víc. Kdyby družice měřila na magnetické indukční čáře nad rovníkem, cesty z obou polokoulí by byly stejně dlouhé a pak i hvizdy ze severu a jihu by byly stejně natažené.

Iontové hvizdy

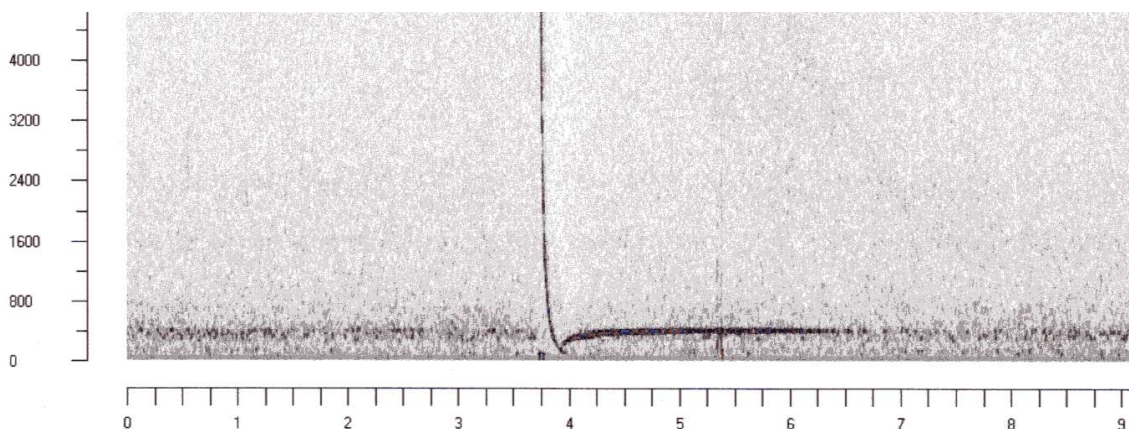
Pro vysvětlení dalšího záznamu získaného družicí Interkosmos 5 je nutné uvažovat pohyb kladně nabitých iontů. V odstavci o levotočivé vlně kapitoly 7.4 a také u složitějšího CMA-diagramu v kapitole 7.7 jsme se s tímto případem už setkali. Řekli jsme si, že v oblasti nízkých frekvencí se plazmatickým prostředím vedle pravotočivých vln mohou šířit i vlny levotočivé. Rezonance L-vlny s prostředím (pohlčení vlny) nastává v momentě, kdy úhlová frekvence vlny je shodná s cyklotronovou frekvencí kladných iontů – ionty se díky vlně rozpohybují po levotočivých šroubovicích a energii vlně „seberou”.

Po úderu blesku se do anizotropní ionosféry dostanou i L-vlny s $\omega < \omega_{ci}$ (vyšší frekvence mají do ionosféry „vstup zakázán”). Jak se vlna vzdaluje od Země, vstupuje do stále slabšího magnetického pole \vec{B}_0 (čáry magnetické indukce se rozbíhají). Okolní hodnota cyklotronové frekvence iontů tedy klesá¹⁷ a přibližuje se k úhlové

¹⁷ Cyklotronová frekvence elektronů klesá samozřejmě také, ale jejich pohyb L-vlnu příliš neovlivní.

frekvenci šířící se vlny. Kroužící ionty zde více vlnu využívají a zabraňují jí v průchodu. Fázová i grupová rychlost vlny postupně klesá. Nuly dosáhne v místě, kde $\omega_{ci} = \omega$.

L-vlny s nízkými frekvencemi (vzdálenými od ω_{ci}) procházejí prostředím snadněji a dostanou se do větších vzdáleností od Země – okolní magnetické pole musí hodně klesnout, aby se ω_{ci} dorovнала s malou ω . Vyšší frekvence (blízké ω_{ci}) procházejí hůře a jsou brzy (nízko) absorbovány. Družice tak naměří pouze vlny s ω menší, než je hodnota lokální cyklotronové frekvence (ω_{ci} v místě družice). Z těch vln, které družice zaznamená, dorazí dříve nízké frekvence, vysoké dojdou později.



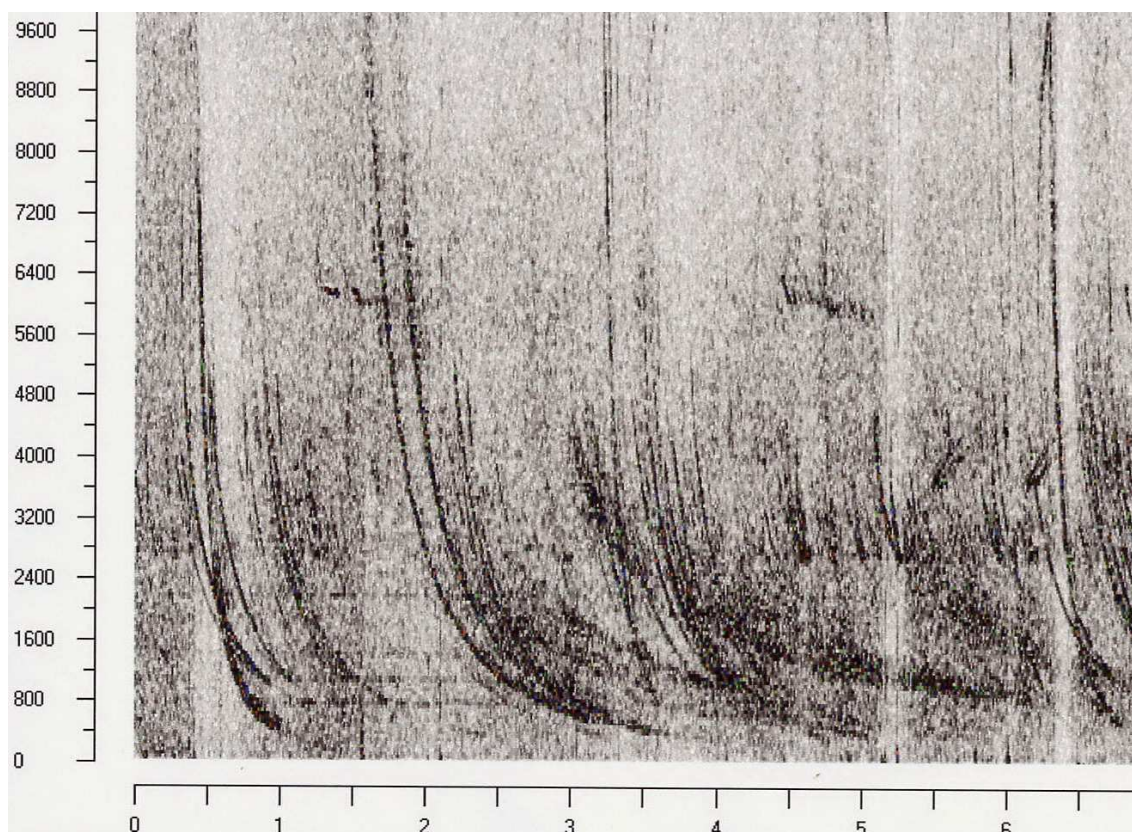
obr. 100: Elektronový (svislý) a iontový (vodorovný) hvizd z blesku pod družicí Interkosmos 5

Na obrázku 100 vidíme krásný iontový hvizd, silná téměř vodorovná čára. Těsně před koncem čtvrté sekundy byly naměřeny nejrychlejší levotočivé vlny s $f \approx 100$ Hz. Pomalé vlny s frekvencemi 350 až 400 Hz dorazily po šesté sekundě záznamu. Iontový hvizd je natažen více než přes 2 s. Z grafu snadno vyčteme lokální cyklotronovou frekvenci iontů, $\omega_{ci} \doteq 400$ Hz (vyšší levotočivé frekvence družice nenaměřila).

Vedle iontového byl naměřen i „normální“ (tzv. elektronový) hvizd týkající se pravotočivých vln (jde o tentýž typ hvizdu jako *S* na obrázku 99).

Iontové hvizdy lze měřit jen družicemi. Oproti elektronovým se na Zemi už nedostanou, všechny frekvence jsou postupně absorbovány.

Najít pěkné grafy různých typů hvizdů je obtížné. Obrázky často „kazí“ šumy nebo jiné vlny, ze kterých se některé ještě nikomu nepodařilo objasnit. Na závěr kapitoly si pro představu ukážeme obvyklejší záznam z měření (obr. 101). Tato data naměřila v listopadu roku 1999 družice Magion 5 ve výšce 3500 km na středních zeměpisných šířkách. Vidíme zde velké množství různě dlouhých hvizdů i nějaké ty šumy.



obr. 101: Běžný záznam, který naměřila družice Magion 5

9.5 Hvizdový mód z družice Freja

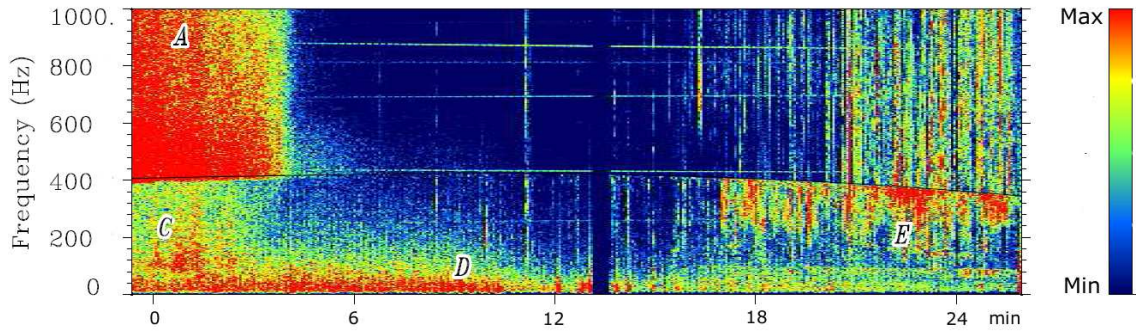
Švédská družice Freja byla vypuštěna 6. 10. 1992. Obíhala kolem Země po eliptické dráze s perigeem 600 km (místo na elipse nejbliž Zemi) a apogeem 1750 km (nejvzdálenější místo trajektorie). Jeden oběh trval necelé dvě hodiny.

Následující data byla naměřena v červnu roku 1993. Družice letěla ve výšce 1700 km nad Tichým oceánem podvečer místního času. Po deseti minutách se dostala do apogea své trajektorie, kde se stočila, a dál pokračovala jihovýchodně až k zeměpisné šířce, kde tou dobou už byla jedna hodina po půlnoci. Družice tedy měřila za sluníčka a na stejných zeměpisných šířkách i za tmy. Průlet trval 27 minut.

Na vodorovných osách grafů opět najdeme čas, tentokrát ale v minutách, na svislé ose pak frekvenci v Hz. Barevně jsou odlišeny různé hodnoty zobrazované veličiny (v předchozích kapitolách šlo pouze o odstín šedi).

Černá křivka uprostřed obrázků představuje lokální cyklotronovou frekvenci vodíkových iontů f_{H^+} . Přibližně v polovině záznamu je „hluché“ místo – družice chvilku neměřila.

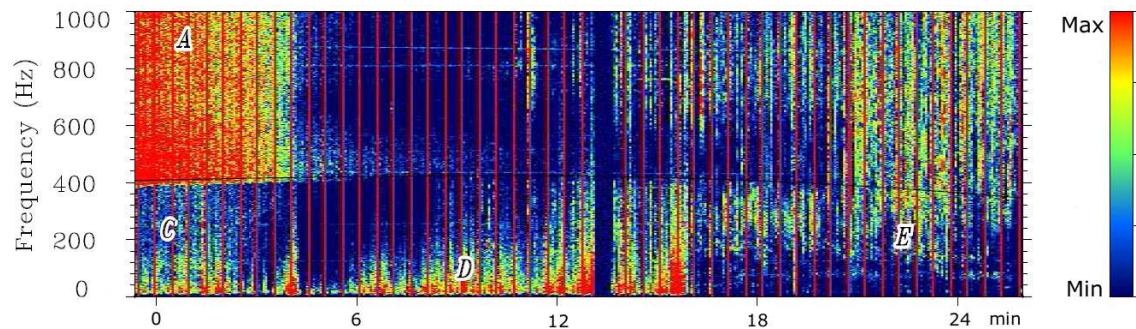
Graf 102 zobrazuje magnetickou složku elektromagnetických vln. Vpravo vidíme škálu intenzity: modrá barva odpovídá velmi slabým nebo žádným vlnám, červená barva naopak vlnám intenzivním. V grafu jsou písmeny *A*, *C*, *D* a *E* označeny čtyři typy vlnových jevů.



obr. 102: Magnetická indukce $|\vec{B}|$; převzato z [4]

Vidíme, že velmi intenzivní vlny *A* byly naměřeny jen v podvečer (na začátku záznamu). Když družice letěla nad stejnými šířkami v noci (kolem 20. minuty), už je nezaznamenala. Vlny *A* mají ostré ořezání velmi blízko pod lokální cyklotronovou frekvencí vodíkových iontů. Z přesné spodní hranice vln typu *A* lze zjistit procentuální zastoupení vodíku v místech letu družice. Čím je tato hranice blíže k lokální f_{H^+} (černé křivce), tím je ve vzduchu méně vodíku.

Vlny *C* jsou pozorovány na nižších frekvencích a byly také naměřeny jen ve dne. Vlny typu *D* s velmi nízkými frekvencemi družice zaznamenávala v průběhu celého průletu. Na noční vlny *E* se dále podíváme trochu podrobněji.

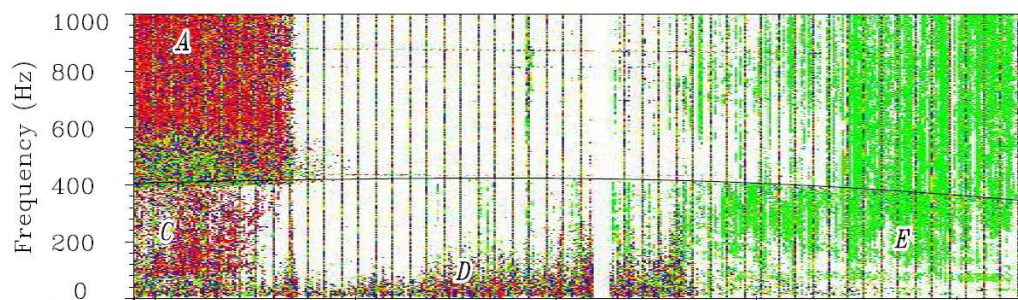


obr. 103: Elektrická intenzita $|\vec{E}|$; převzato z [4]

Na grafu 103 je vynesena elektrická složka elektromagnetických vln. Červeně jsou opět značeny velmi intenzivní vlny. Až na svlé červené čáry jsou grafy 102 a 103

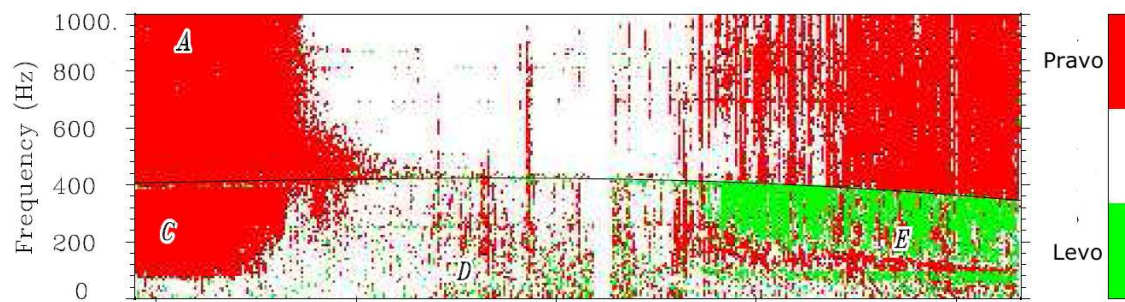
velmi podobné. Pravidelné čáry nepopisují žádné „přírodní“ elektromagnetické vlny, vznikají uměle v důsledku měření.

Družice měřila elektrickou intenzitu a magnetickou indukci, další grafy jsou z těchto údajů vypočteny. Graf 104 ukazuje, zda jdou elektromagnetické vlny směrem k Zemi (červeně) nebo od Země (zeleně). Tam, kde jsou vlny příliš slabé nebo žádné, je bílé místo. Vlny typu E se šíří od Země.



obr. 104: Směr šíření vln; červená k Zemi, zelená od Země; převzato z [4]

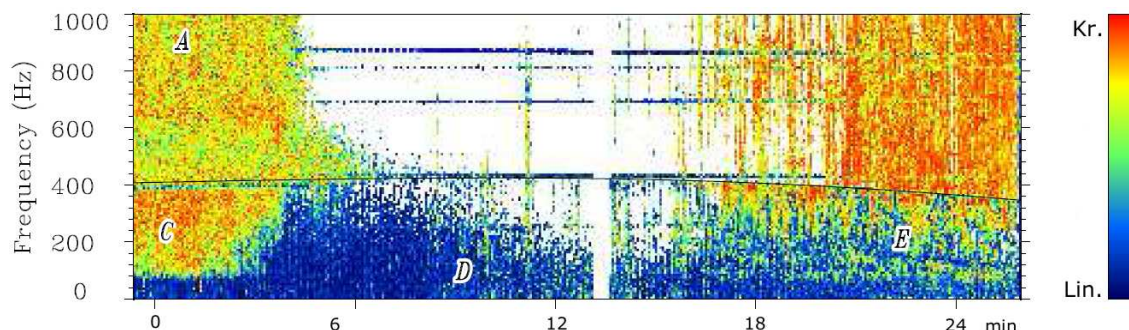
Na dalším obrázku vidíme, jestli jsou vlny spíše pravotočivé (červeně), levotočivé (zeleně) nebo lineárně polarizované (bíle). Z grafů 104 a 105 vyčteme, že družice naměřila levotočivé vlny jdoucí od Země pouze s frekvencí menší nebo rovnou cyklotronové frekvenci vodíkových iontů. Vyšší frekvence byly absorbovány už pod družicí, když okolní f_{H^+} (resp. ω_{ci}) vyrovnala frekvenci vlny f (úhlovou frekvenci ω). Nízké frekvence jsou absorbovány až nad družicí ve větších výškách se slabším B_0 a nízkou cyklotronovou frekvencí – odstavec o iontových hvizdech v 9.4. Červeně zakreslené pravotočivé vlny pohyb kladných iontů neovlivňuje.



obr. 105: Smysl polarizace; převzato z [4]

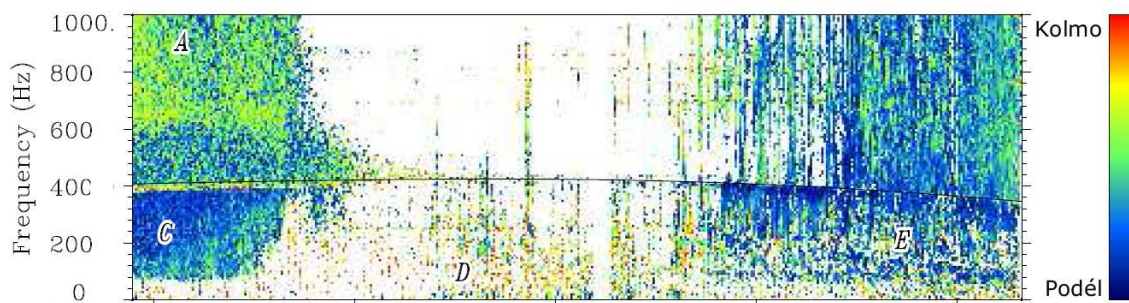
Obrázek 106 popisuje míru eliptické polarizace elektromagnetických vln, maximální elipticitu mají kruhově polarizované vlny (červeně), minimální pak lineárně polarizované (modře). Bílá místa odpovídají nepolarizovaným vlnám. Vlny E

nad černou křivkou f_{H^+} mají vysokou elipticitu, protože jde pouze o vlny pravotočivé (levotočivé byly pod družicí absorbovány). Pod křivkou f_{H^+} se nachází směs pravotočivých a levotočivých vln, a tak výsledná elipticita není vysoká.



obr. 106: Elipticita, míra eliptické polarizace, převzato z [4]

Na dalším obrázku z Freji je velikost úhlu, který svírá vektor fázové rychlosti vlny se směrem magnetického pole Země \vec{B}_0 , úhel θ . Modrá barva odpovídá nulovému úhlu, fázová rychlost směřuje po nebo proti směru \vec{B}_0 . Červená barva patří pravému úhlu, kdy vlna jde kolmo k \vec{B}_0 . Vidíme, že všechny vlny se čar magnetické indukce vesměs drží.

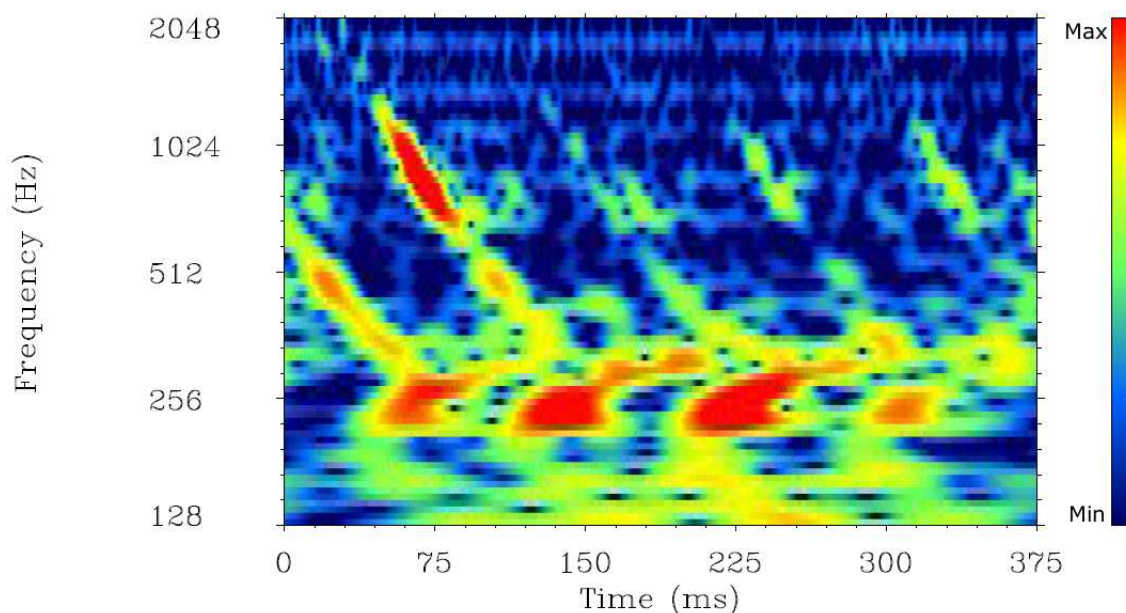


obr. 107: Úhel θ , odklon \vec{v}_f od \vec{B}_0 ; převzato z [4]

Z naměřeného elektrického a magnetického pole lze vytvořit řadu dalších grafů popisující elektromagnetické vlny z okolí družice. Třeba směry fázových či grupových rychlostí nebo míru polarizace (jestli je chování elektrické intenzity a magnetické indukce vlny spíše „učesané“ nebo chaotické).

Kde jsou ty hvizdy?

Ukázali jsme si celkem šest grafů hvizdového módu z družice Freja, ale neviděli jsme ani jeden hvizd – v čase natažený signál. Přesto v záznamu hvizdy jsou a je jich velké množství.



obr. 108: Iontové a elektronové hvizdy; převzato z [4]

Z grafu 102 zobrazující magnetickou indukci si z oblasti vln typu E vyřízneme úzký proužek odpovídající pouze 0,4 s. Svislou osu frekvencí si rozšíříme až k 2000 Hz a převedeme z obyčejné (lineární) na logaritmickou¹⁸. Takto upravený graf $50\times$ zvětšíme a získáme obrázek 108, na vodorovné ose je čas v milisekundách.

Klesající zahnuté křivky jsou obyčejné (elektronové) hvizdy, širší stoupající jsou hvizdy iontové. Iontové hvizdy jsou seshora omezené lokální cyklotronovou frekvencí vodíkových iontů, v tomto případě $f_{H^+} = 400$ Hz.

9.6 Aurorální sykot

V této kapitole si více rozebereme tvar osmičky charakterizující hvizdový R-mód. Na datech naměřených družicí Polar si pak ukážeme důsledky, které odtud plynou.

Na obrázku 109 jsou tři různé osmičky charakterizující velikosti fázových rychlostí v různých směrech. Všechny tři patří hvizdovému módu, každá ale jiné frekvenci.

¹⁸Krok o jeden dílek už neznamená zvětšení o daný počet Hz, ale zdvojnásobení předchozí hodnoty.

První osmička popisuje chování vlny s nízkou frekvencí, druhá charakterizuje vlnu s vyšší f a třetí vlnu o vysoké frekvenci. S růstem frekvence vlny klesá její rezonanční úhel.

Šedé šipky ukazují směry grupových rychlostí jednotlivých vln, když se šíří téměř pod svým rezonančním úhlem. Kdybychom chtěli směry grupových rychlostí i pro menší úhly θ , vytvořili bychom si grafy vlnových vektorů a jim bychom přimalovali kolmice (chlupy) jako v kapitole 9.1. Jelikož aurorální sykot, kterým se budeme dále zabývat, je tvořen pouze vlnami šířícími se v blízkosti svého rezonančního kužele, jiné než šedé šipky nepotřebujeme.

Vlnám s nízkou frekvencí (obr. 109a) připadá do široka otevřený rezonanční kužel. Vektor grupové rychlosti vln šířících se poblíž povrchu rezonančního kužele se od \vec{B}_0 příliš neodklání. Zvyšujeme-li frekvenci vlny, její rezonanční úhel se zmenšuje a směr šíření informace o vlně poblíž θ_R se od magnetického pole více odchyluje, obr. 109b a 109c.

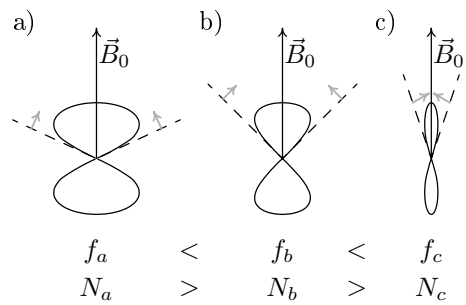
Zbývá ještě dodat, že s klesající hustotou plazmatu N (počet volných elektronů v daném objemu) klesá rezonanční úhel. Neboli, šíří-li se vlna z prostředí hustšího do řidšího, její rezonanční kužel – patřící jediné frekvenci – se v průběhu cesty mění, zužuje se.

Vznik aurorálního sykotu

Když se dostane velké množství rychlých elektronů do zemské atmosféry, vidíme ji jako polární záři. Rychle padající elektrony jsou okolními molekulami bržděny a ty se přebytečné energie zbavují vyzářením elektromagnetické vlny. Má-li tato vlna vhodnou frekvenci, vidíme ji.

K polárním zářím dochází v tzv. aurorální oblasti, v oblasti vyšších zeměpisných šířek. V jiných šířkách magnetické pole Země nedovolí elektronům se dostat ze Slunce až do atmosféry.

Nabitě elektrony nemůžou na Zemi jenom padat, planeta se jich musí také zbavovat. Existují tedy elektrony, které na vyšších zeměpisných šířkách letí od Země pryč. Ve výškách kolem 6 000 km nad Zemí mají oproti částicím z okolí velkou rychlost ve směru radiálně (pryč) od Země. To ovšem nevyhovuje rovnovážnému stavu. Aby se prostředí ustálilo, elektrony se přebytečné energie zbaví, „lépe pak zapadnou do kolektivu“. To v žádném případě neznamená, že všechny částice pak mají stejnou rychlost. Vzpomeňme si na plyn v krabici a obrázek 40 v kapitole 5.1.



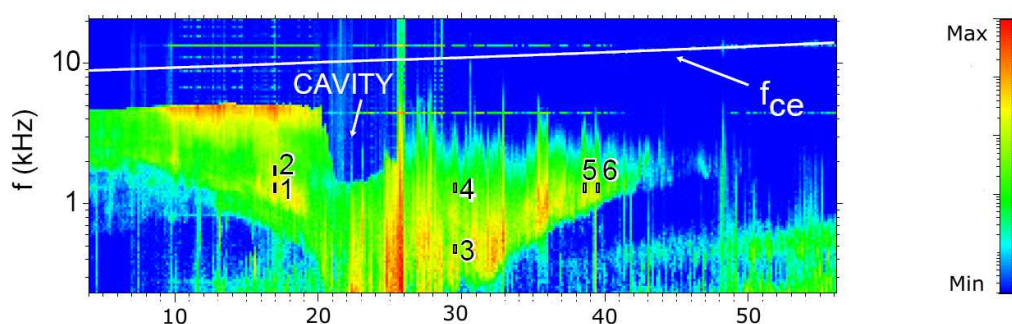
obr. 109: Různé osmičky hvizdového módu, směry \vec{v}_g vln šířících se v blízkosti θ_R

Vyzářené vlny se šíří od Země stejně jako elektrony, které je vyzářily. Tyto vlny nazýváme aurorálním sykotem. Vidět je určitě nemůžeme, oproti viditelným vlnám mají příliš nízké frekvence. Kdybychom je však reproduktorem převedli na zvuk, tak je uslyšíme (jako u hvězdy na str. 71).

Aurorální sykot naměřený družicí Polar

Na obrázku 110 jsou data, která naměřila družice Polar¹⁹ 6. března 1997. Družice prolétávala ve výšce kolem 25 000 km (čtyř zemských poloměrů) nad východní částí Kanady. Počátek záznamu na obrázku 110 odpovídá přibližně 58° severní šířky a konec asi 44° severní šířky. Družice letěla téměř podél poledníku přímo na jih a průlet trval asi 50 minut. V Kanadě v době měření byly dvě hodiny po půlnoci. Družice měřila elektrickou intenzitu a magnetickou indukci.

Na vodorovné ose v grafu běží čas. S časem postupně klesá zeměpisná šířka a také výška letu (družice mírně klesala). Na logaritmickou svislou osu je nanášena frekvence do 10 kHz (nerovnoměrně rozložené čárky mezi 1 kHz a 10 kHz odpovídají 2, 3, 4... kHz). Barevně je odlišena intenzita měřených vln.



obr. 110: Intenzita elektromagnetických vln; převzato z [5]

Na začátku měření (na severu) družice zaznamenala vlny o vyšších frekvencích, přibližně od 2 kHz do 4 kHz. S postupujícím časem se přidávaly frekvence nižší a nižší. Kolem 25. minuty (zeměpisné šířky 52°) Polar naměřila všechny elektromagnetické vlny s frekvencí menší než 4 kHz. S dalším poklesem zeměpisné šířky družice postupně o nižší frekvence přicházela, až kolem 43. minuty zachytila pouze vlny kolem 2 kHz. Výsledný graf má tvar jakéhosi trychtýře.

¹⁹Polar byla vypuštěna 27. února 1996. V maximální výšce přibližně 50 000 km (osm poloměrů Země) nad aurorální oblastí zkoumala okolní prostředí. Kromě elektromagnetických vln měřila různé parametry plazmatu a fotografovala aurorální oblasti Země.

Vysvětlení trychtýřovitého tvaru

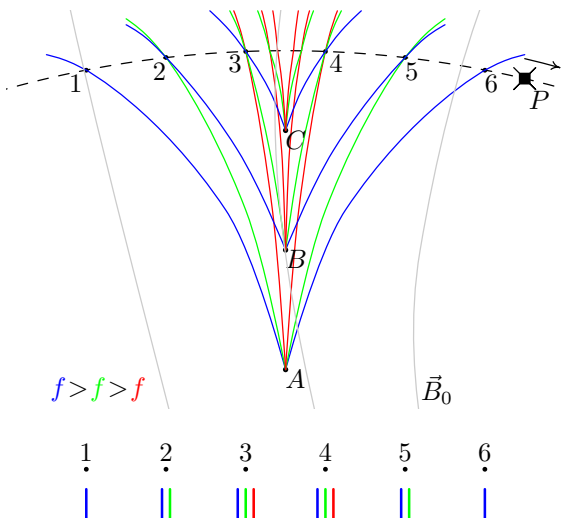
Z trychtýřovitého tvaru grafu 110 lze usoudit, že kolem zeměpisné šířky 52° (tam, kde družice naměřila nejvíc frekvencí), je „čárový zdroj“ aurorálního sykotu – elektromagnetických vln hvizdového módu. Tento závěr nám pomůže objasnit několik obrázků.

Družice Polar na obrázku 111 letí po čárkované dráze, postupně prolétá první až šestou polohou. Země se nachází pod obrázkem, hustota plazmatu N s výškou klesá. Tenké šedé čáry charakterizují magnetické pole Země.

Předpokládejme, že bod A je zdrojem elektromagnetických vln různých frekvencí. Vysoké frekvence hvizdového módu označíme modře, střední zeleně a nízké červeně.

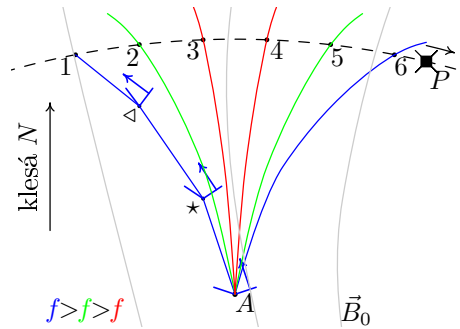
Modré široké „věčko“ s vrcholem v bodě A a šipkou představuje rezonanční kužel vlny vysoké frekvence a směr vektoru její grupové rychlosti.

Informace o modré vlně se šíří ve směru šipky a po chvíli se dostane do místa \star . Zde je nižší hustota plazmatu, rezonanční kužel vlny se zúží a grupová rychlost se více odkloní od \vec{B}_0 . Vlna se dostane do místa \triangleleft . Hustota oproti \star opět poklesla, kužel se ještě sevře a \vec{v}_g se více odchýlí od \vec{B}_0 . Vlna se dostane do 1.



obr. 112: Tři zdroje, každý tři frekvence

informace o zelené vlně šíří po zelených křivkách na obrázku 111. Družice Polar naměří střední frekvence v místech 2 a 5. Nízká červená frekvence má v bodě A ještě



obr. 111: Šíření vln ze zdroje A ; Země je pod obrázkem

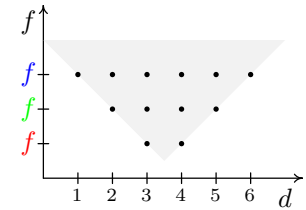
Ve skutečnosti se okolní prostředí mění plynule a tudíž i kužel se plynule uzavírá – informace o vlně se tak šíří po hladkých modrých křivkách (z A do 6) a ne po lomených čarách (z A do 1). Elektromagnetickou vlnu s vysokou frekvencí vyzářenou zdrojem A naměříme pouze v místech ležících na modrých čarách, nikde jinde se o těchto vlnách neví. Vysoké frekvence z A družice Polar zaznamená jen v polohách 1 a 6.

Střední zelené frekvence v bodě A odpovídá větší rezonanční úhel a tudíž rozvěřenější kužel. Zelená grupová rychlost tak směřuje více podél \vec{B}_0 . Díky postupnému uzavírání rezonančního kužele se

širší rezonanční kužel, a tudíž červené křivky jsou nejméně rozevřené. Družice tyto vlny naměří v polohách 3 a 4.

Uvažujme další dva bodové zdroje elektromagnetických vln nad původním A . Trasy tří frekvencí ze všech tří zdrojů pak vidíme na obrázku 112. Družice letící po čárkované křivce naměří v krajních polohách 1 a 6 pouze vysoké frekvence, v polohách 2 a 5 vysoké a střední frekvence a v místech 3 a 4 všechny tři.

Naměřené hodnoty zjednodušeného příkladu se třemi zdroji a třemi frekvencemi vytvoří v záznamu dvanáct teček, obr. 113. Na vodorovné ose je poloha družice (resp. ubíhající čas) a na svislé ose frekvence. Když uvážíme spojitě spektrum vln a čárový zdroj (bleděmodrá úsečka obsahující body A , B a C), namísto teček se v grafu objeví trychtýř.



obr. 113: Družice naměří

Ve skutečnosti takový pěkný symetrický tvar z obrázku 113 družice nenaměří, podívejte se znovu na záznam²⁰ 110. První polovina trychtýře tvořená vlnami šířících se doleva (ve skutečnosti severně) je hezká dost. Ovšem vlny, které se šíří na jih od zdroje a vytváří pravou polovinu trychtýře na obrázku 110, se dostávají do silnějšího magnetického pole Země (čáry magnetické indukce se stáčí k Zemi). V takovém prostředí mohou být některé vlny snadno absorbovány, družice pak v druhé polovině měření část vln vůbec nezaznamená. Proto není pravá polovina trychtýře z obrázku 110 stejně velká jako levá.

Horní okraj trychtýře

„Neošizená” pravá strana trychtýře z obrázku 110 má velmi ostrý horní okraj – žádné vlny s frekvencí vyšší než je hraniční $f_m = 4$ kHz družice Polar nezaznamenala. Není to tím, že by zdroje vyzařovaly pouze vlny s takto omezenou frekvencí. Kdybychom družici vyslali blíž k Zemi (níž), naměřila by i vyšší frekvence, trychtýř by sahal výš. Některé vlny vyzářené zdroji pod družicí se tedy k družici nedostanou.

Už víme, že když vlna stoupá k družici, prochází plazmaticky řidším a řidším prostředím a její rezonanční kužel se přitom zužuje. Má-li vlna už na počátku kužel velmi úzký, tak se na cestě k družici úplně uzavře. Rezonanční úhel klesne na nulu a z kužele se stane úsečka. Elektromagnetická vlna může pokračovat dál pouze v případě, že její fázová rychlost směřuje přesně rovnoběžně s magnetickým polem. Kdykoli se \vec{v}_f odchyluje od \vec{B}_0 , prostředí vlnu absorbuje a družice ji nezaznamená.

Z výpočtů plyne, že rezonanční úhel pravotočivé vlny je roven nule, má-li vlna úhlovou frekvenci rovnu plazmové frekvenci prostředí, ve kterém se nachází, $\omega = \omega_p$.

²⁰Pozor, barvy v záznamu 110 z družice Polar charakterizují intenzitu vln, frekvence se nanáší na svislou osu.

V místě vyzáření mají vlny úhlovou frekvenci ω menší než je lokální plazmová frekvence ω_p . Jak se vlna šíří pryč od Země, lokální plazmová frekvence se zmenšuje a přibližuje k frekvenci vlny. V momentě rovnosti je vlna okolním prostředím absorbována (množství vln s $\vec{v}_f \parallel \vec{B}_0$, které projde dál, je neměřitelné).

Hodnota f_m tedy odpovídá plazmové frekvenci prostředí, ve kterém se družice nachází. Vyšším frekvencím se zavřou kužele už pod družicí, nižším až nad ní. Z naměřené hodnoty f_m , kde $f_m = \frac{\omega_p}{2\pi}$, a podle vzorce (41) $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$, určíme hustotu plazmatu N v místě družice. Pro $f_m = 4$ kHz, vychází $N = 0,2$ elektronu na cm^3 .

Nejsme na konci

Zabývat se vlnami kolem naší planety je užitečné. Například pomocí ostrého ořezání vln (angl. cut-off) na plazmové frekvenci z předchozí kapitoly jsme schopni určit hustotu plazmatu v místě družice. Chytat a počítat nabitě částice ve vzdálenosti několika tisíc kilometrů nad Zemí je technicky mnohem náročnější než v tomtéž místě měřit elektrické a magnetické pole. Vedle nosové frekvence z kapitoly 9.3 není tento případ jediný, kdy z měření elektromagnetických vln v okolí Země určíme parametry místního prostředí snáze a přesněji než přímým měřením.

Teorie elektromagnetických vln v plazmatu s vnějším magnetickým polem stojí na poměrně jednoduchých základech - vlnění a pohyb nabitých částic v magnetickém poli. Ovšem z těchto jednoduchých principů vyplývá řada o poznání složitějších důsledků. Některé jsme si vysvětlili, některé ne a některé jsou složité příliš, že je ještě nikdo vysvětlit nedokáže.

Příkladem je vnější radiační pás (neboli Van Allenův²¹ pás), který se nachází okolo naší planety ve vzdálenosti dvou až tří poloměrů Země. Pás tvoří jakýsi široký prstenec, který obklopuje naši planetu nad šířkami menšími než 60°, nad póly není. V tomto pásu magnetické pole Země drží velké množství volných elektronů. Nové výzkumy ukazují, že elektromagnetické vlny hvizdového módu (f řádu kHz) tyto elektrony účinně urychlují. Elektrony s vysokou energií jsou pak nebezpečné nejen pro elektronická zařízení na družicích ale i pro posádky kosmických lodí.

Jak je zřejmé, od náhodou chycených hvizdů ze začátku minulého století se výzkum hvizdového módu významně posunul, rozhodně ale není na konci.

²¹ V roce 1958 James A. Van Allen prokázal ze záznamů družic Explorer 1 a Explorer 3 existenci radiačních pásů.

Závěr

Přestože jsem text psala hlavně pro studenty vyšších ročníků gymnázií, kteří mají o fyziku zájem, myslím si, že některé části jsou vhodné pro všechny studenty.

Vedle zopakování mechanických kmitů a vln a elektromagnetických vln ve vakuu se čtenáři dozvěděli o základních vlastnostech šíření elektromagnetických vln v izotropním i anizotropním prostředí. Setkali se s plazmatem a jeho vlivu na procházející elektromagnetické vlny a na závěr s elektromagnetickými vlnami v plazmatickém prostředí s vnějším magnetickým polem. Celá, poměrně dlouhá teoretická část vedla k vysvětlení některým nízkofrekvenčním jevům v zemské atmosféře doplněné o známky naměřených dat.

Věřím, že vedle středoškolských studentů text využijí studenti vysokých škol, učitelé fyziky i širší veřejnost.

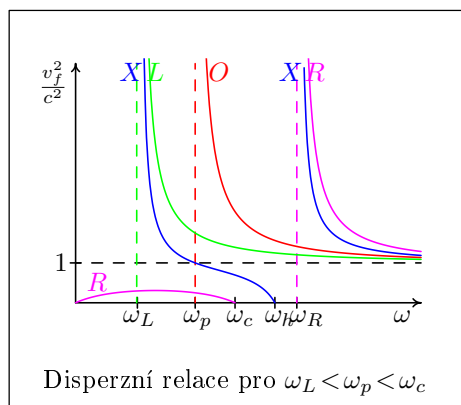
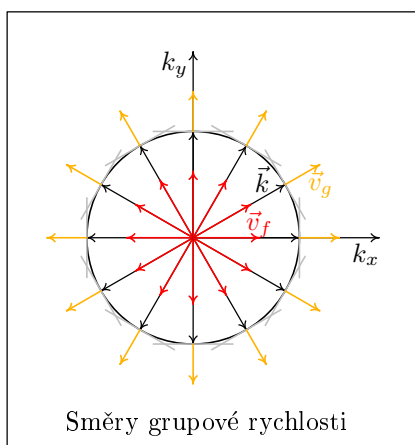
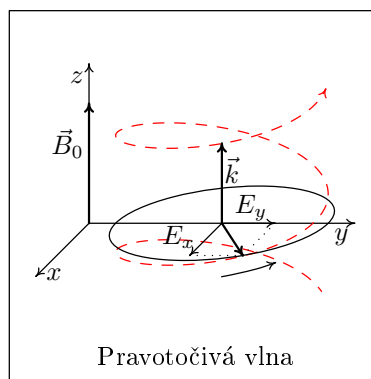
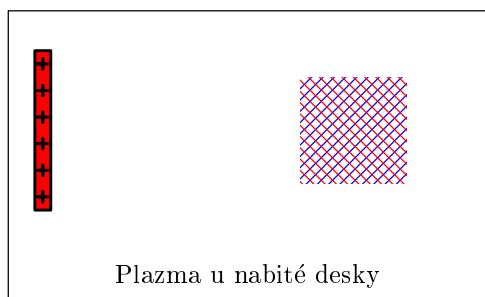
Text je v době podání diplomové práce zveřejněn na adrese http://os.matfyz.cz/prace/2007dipl_zuzka_horova.pdf a postupně bude též dostupný na Fyzwebu, oficiálních stránkách Katedry didaktiky fyziky MFF UK.

Literatura

- [1] D. G. Swanson. *Plasma waves*. Institute of Physics, Bristol, UK, second edition, 2003.
- [2] F. F. Chen. *Úvod do fyziky plazmatu*. Academia, Praha, 1984.
- [3] F. Jiříček. *Dráhy šíření hvízdů pozorovaných ve středních geomagnetických šířkách*. Kandidátská disertační práce, Geofyzikální ústav ČSAV, Praha, 1967.
- [4] O. Santolík a M. Parrot. Case studies on wave propagation and polarization of ELF emissions observed by Freja around the local proton gyro-frequency. *Journal of Geophysical Research*, 104:2459–2475, 1999.
- [5] O. Santolík a D. A. Gurnett. Propagation of auroral hiss at high altitudes. *Geophysical Research Letters*, 29:doi:10.1029/2001GL013666, 2002.
- [6] R. A. Helliwell. *Whistlers and related ionospheric phenomena*. Stanford University Press, Stanford, USA, 1965.
- [7] R. B. Horne a kol. Wave acceleration of electrons in the Van Allen radiation belts. *Nature*, 437:227–230, 2005.
- [8] E. Svoboda a kolektiv autorů. *Přehled středoškolské fyziky*. Prometheus, Praha, 2001, dotisk třetího vydání.
- [9] R. Resnick, J. Walker, D. Halliday. *Fyzika*. VUTIUM, Brno, 2000.
- [10] J. Rybička. *L^AT_EX pro začátečníky*. KONVOJ, Brno, 1999, druhé vydání.
- [11] M. Krátká. *Tvorba obrázků pro matematické testy pomocí Metapostu*. Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 2001.

Dodatek

Zde jsou uvedeny zdrojové kódy čtyř obrázků. První je část obrázku 43 z kapitoly 5.6 o plazmových oscilacích. Další zobrazuje pravotočivou vlnu z kapitoly 7.4. Obrázek vlevo dole je vybraný z kapitoly 4.12 a ukazuje shodné směry vektorů fázových a grupových rychlostí elektromagnetických vln šířících se izotropním prostředím. Poslední obrázek patří do kapitoly 7.6. Zobrazuje disperzní relace čtyř základních vln v plazmatickém prostředí s magnetickým polem, ve kterém platí $\omega_L < \omega_p < \omega_c$. Hodnoty ω_p a ω_c jsem zvolila: $\omega_p = 3$ jednotky, $\omega_c = 4$ jednotky. Zbylé tři hodnoty jsou určeny vzorci $\omega_L = \frac{1}{2}(-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}) \doteq 1,55j$, $\omega_R = \frac{1}{2}(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}) \doteq 5,55j$, $\omega_h = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2} = 5j$.



Plazma u nabité desky

<code>\opengraphsfile{krychle}</code>	začátek obrázku, jeho název
<code>\mpic[10]{-10}{10}{-3}{3}</code>	použití mpic, měřítko a rozměry obr.
<code>\pen{1.2}</code>	nastavení silnějšího pera
<code>\gfill[red]\rect{(-10,-3),(-9.4,3)}</code>	vybarvení desky
<code>\rect{(-10,-3),(-9.4,3)}</code>	ohraničení desky
<code>\plotsymbol[3pt]{Plus}{(-9.7,-2.5),</code> <code>(-9.7,-1.5),(-9.7,-0.5),(-9.7,0.5),</code> <code>(-9.7,1.5),(-9.7,2.5)}</code>	plusy na desce
<code>\hatchcolor{blue}</code>	nastavení barvy šrafování
<code>\rhatch\rect{(0,-2),(4,2)}</code>	čtverec vyšrafovaný z pravého horního rohu
<code>\hatchcolor{red}</code>	nastavení barvy šrafování
<code>\lhatch\rect{(0,-2),(4,2)}</code>	čtverec vyšrafovaný z levého horního rohu
<code>\endmpic</code>	konec používání mpic
<code>\closegraphsfile</code>	konec obrázku

Pravotočivá vlna

<code>\opengraphsfile{Rvlna}</code>	začátek obrázku, jeho název
<code>\mfpic[13]{-2}{10}{-3}{6}</code>	použití mfpic, měřítko a rozměry obrázku
<code>\arrow\lines{(0,0),(0,6)}</code>	osa z
<code>\tlabel[cr]{(-0.2,5.5)}{\\$z\\$}</code>	popis osy z
<code>\arrow\lines{(0,0),(10,0)}</code>	osa y
<code>\tlabel[tc]{(9.5,-0.2)}{\\$y\\$}</code>	popis osy y
<code>\arrow\lines{(0,0),(-2,-2)}</code>	osa x
<code>\tlabel[tc]{(-1.6,-1.7)}{\\$x\\$}</code>	popis osy x
<code>\pen{0.9}</code>	nastavení silnějšího pera
<code>\arrow\lines{(0,0),(0,4.5)}</code>	vektor \vec{B}_0
<code>\tlabel[cr]{(-0.2,3)}{\\$\vec{B}_0\\$}</code>	popis vektoru \vec{B}_0
<code>\arrow\lines{(5,0),(5,3)}</code>	vektor \vec{k}
<code>\tlabel[cr]{(5.1,2)}{\\$\vec{k}\\$}</code>	popis vektoru \vec{k}
<code>\pen{0.5}</code>	nastavení původní tloušťky pera
<code>\fdef{fel}{x}</code>	zadefinování funkce fel vykreslující
<code>{0.25*sqrt(5.6^2-(1.4*x-5*1.4)^2)}</code>	horní polovinu elipsy
<code>\drawcolor{red}</code>	nastavení barvy pera
<code>\headcolor{red}</code>	nastavení barvy hrotů šipek
<code>\arrow\dashed\parafcn{-10,4.5,0.3}</code>	parametricky zadaná funkce
<code>{(-4*sin(t)+5,1.4*cos(t)+0.7*t+2.2)}</code>	vykreslená čárkovaně a se šipkou
<code>\drawcolor{black}</code>	nastavení barvy pera
<code>\headcolor{black}</code>	nastavení barvy hrotů šipek
<code>\xslant{1}</code>	nastavení vykreslování „sešlápnutě” (pro trojrozměrný dojem)
<code>\draw\ellipse{(5,0),4,1.4}</code>	elipsa daná středem a poloosami
<code>\pen{0.9}</code>	nastavení silnějšího pera
<code>\arrow\lines{(5,0),(7,fel(7))}</code>	vektor \vec{E}
<code>\pen{0.5}</code>	nastavení původní tloušťky pera
<code>\arrow\lines{(5,0),(7,0)}</code>	y -ová složka \vec{E}
<code>\tlabel[bc]{(6,0.1)}{\\$\vec{E}_y\\$}</code>	popis složky E_y
<code>\arrow\lines{(5,0),(5,fel(7))}</code>	x -ová složka \vec{E}
<code>\tlabel[cr]{(4.5,-0.5)}{\\$\vec{E}_x\\$}</code>	popis složky E_x
<code>\dotted\lines{(7,0),(7,fel(7)),(5,fel(7))}</code>	tečkovaná lomená čára
<code>\arrow\curve{(7,fel(7)-0.8),</code>	šipka udávající
<code>(8,fel(8)-0.8),(8.5,fel(8.5)-0.8)}</code>	směr otáčení \vec{E}
<code>\endmfpic</code>	konec používání mfpic
<code>\closegraphsfile</code>	konec obrázku

Směry grupové rychlosti v izotropním prostředí

<code>\opengraphsfile{vgizotr}</code>	začátek obrázku, jeho název
<code>\mpic[10]{-5.5}{7}{-5.5}{7}</code>	použití mpic, měřítko a rozměry obrázku
<code>\mpdefinecolor{zluta}{rgb}{1,0.7,0}</code>	nadefinování barvy zluta
<code>\arrow\lines{(0,0),(0,7)}</code>	osa y
<code>\tlabel[cr]{-0.2,6.5}{\mathbf{k}_y}</code>	popis osy y
<code>\arrow\lines{(0,0),(7,0)}</code>	osa x
<code>\tlabel[cr]{6.5,-0.2}{\mathbf{k}_x}</code>	popis osy x
<code>\pen{0.7}</code>	nastavení větší tloušťky pera
<code>\circle{(0,0),4}</code>	kružnice zadaná středem a poloměrem
<code>\tlabel[cc]{2.6,2.2}{\vec{k}}</code>	popis vektoru \vec{k}
<code>\tlabelcolor{red}</code>	nastavení barvy popisek
<code>\tlabel[cc]{2.5,0.5}{\vec{v}_f}</code>	popis vektoru \vec{v}_f
<code>\tlabelcolor{zluta}</code>	nastavení barvy popisek
<code>\tlabel[cc]{4.8,2}{\vec{v}_g}</code>	popis vektoru \vec{v}_g
<code>\pen{0.5}</code>	nastavení původní tloušťky pera
<code>\arrow\lines{(0,0),(4,0)}</code>	vodorovný vektor \vec{k}
<code>\pen{0.7}</code>	nastavení větší tloušťky pera
<code>\drawcolor{0.75white}</code>	nastavení barvy pera
<code>\headcolor{0.75white}</code>	nastavení barvy hrotů šipek
<code>\lines{(4,-1.5),(4,1.5)}</code>	šedá tečna
<code>\drawcolor{zluta}</code>	nastavení barvy pera
<code>\headcolor{zluta}</code>	nastavení barvy hrotů šipek
<code>\arrow\lines{(4,0),(5.5,0)}</code>	směr vektoru \vec{v}_g
<code>\drawcolor{red}</code>	nastavení barvy pera
<code>\headcolor{red}</code>	nastavení barvy hrotů šipek
<code>\arrow\lines{(0,0),(2.5,0)}</code>	vektor \vec{v}_f
<code>\drawcolor{black}</code>	nastavení barvy pera
<code>\headcolor{black}</code>	nastavení barvy hrotů šipek
<code>\rotate{30}</code>	otočení o 30°
<code>\arrow\lines{(0,0),(4,0)}</code>	další vektor \vec{k}
<code>:</code>	vykreslení tečny a červené a žluté šipky
	vše $11 \times$ zopakováno i s příkazem <code>\rotate{30}</code> ,
	nakreslí ještě $11 \times$ tři šipky a tečnu
	pokaždé o 30° pootočené
<code>\endmpic</code>	konec používání mpic
<code>\closegraphsfile</code>	konec obrázku

Disperzní relace pro případ $\omega_L < \omega_p < \omega_c$, kde $\omega_p = 3j$, $\omega_c = 4j$

<code>\opengraphsfile{lpc}</code>	začátek obrázku, jeho název
<code>\mfpic[15]{-1}{9}{-2}{6.2}</code>	použití mfpic, měřítko a rozměry obrázku
<code>\arrow\lines{(0,0),(9,0)}</code>	osa x
<code>\tlabel[tc](8.5,-0.2){\omega}</code>	popis osy x
<code>\arrow\lines{(0,0),(0,6)}</code>	osa y
<code>\tlabel[cr](-0.2,5.5){v_f^2\over c^2}</code>	popis osy y
<code>\xmarks{1.55,3,4,5,5.55}</code>	značky na ose x
<code>\tlabel[tc](1.7,-0.2){\omega_L}</code>	popisek ω_L
<code>:</code>	podobně popisky ω_p , ω_c , ω_h a ω_R
<code>\ymarks{1}</code>	značka na ose y
<code>\tlabel[cr](-0.2,1){1}</code>	jednička na ose y
<code>\dashed\lines{(0,1),(9,1)}</code>	vodorovná přerušovaná čára
<code>\drawcolor{green}</code>	nastavení barvy pera
<code>\dashed\lines{(1.55,0),(1.55,6)}</code>	svislá přerušovaná k ω_L
<code>\drawcolor{red}</code>	nastavení barvy pera
<code>\dashed\lines{(3,0),(3,6)}</code>	svislá přerušovaná k ω_p
<code>\drawcolor{magenta}</code>	nastavení barvy pera
<code>\dashed\lines{(5.55,0),(5.55,6)}</code>	svislá přerušovaná k ω_R
<code>\drawcolor{red}</code>	nastavení barvy pera
<code>\tlabelcolor{red}</code>	nastavení barvy popisek
<code>\function{3.1,9,0.1}{x^2/(x^2-3^2)}</code>	disperzní relace řádné vlny
<code>\tlabel[cc](3.6,5.8){0}</code>	popisek O
<code>\drawcolor{blue}</code>	nastavení barvy pera
<code>\tlabelcolor{blue}</code>	nastavení barvy popisek
<code>\function{1.7,5,0.1}{(x^4-(5*x)^2)/(x^4+3^4-(5*x)^2-(3*x)^2)}</code>	první část disperzní relace mimořádné vlny
<code>\tlabel[cc](1.5,5.8){X}</code>	popisek X u první části
<code>function{5.7,9,0.1}{(x^4-(5*x)^2)/(x^4+3^4-(5*x)^2-(3*x)^2)}</code>	druhá část disperzní relace mimořádné vlny
<code>\tlabel[cc](5.5,5.8){X}</code>	popisek X u druhé části
<code>\drawcolor{magenta}</code>	nastavení barvy pera
<code>\tlabelcolor{magenta}</code>	nastavení barvy popisek
<code>\function{0,4,0.1}{(x^2-4*x)/(x^2-4*x-3^2)}</code>	první část disperzní relace pravotočivé vlny
<code>\tlabel[cc](0.5,0.5){R}</code>	popisek R u první části
<code>\function{5.7,9,0.1}{(x^2-4*x)/(x^2-4*x-3^2)}</code>	druhá část disperzní relace pravotočivé vlny
<code>\tlabel[cc](6.1,5.8){R}</code>	popisek R u druhé části
<code>\drawcolor{green}</code>	nastavení barvy pera
<code>\tlabelcolor{green}</code>	nastavení barvy popisek
<code>\function{1.8,9,0.1}{(x^2+4*x)/(x^2+4*x-3^2)}</code>	disperzní relace levotočivé vlny
<code>\tlabel[cc](2.1,5.8){L}</code>	popisek L
<code>\endmfpic</code>	konec používání mfpic
<code>\closegraphsfile</code>	konec obrázku